

2 ソルバーの使い方

2.1 学習のねらい

- 線形計画法などの最適化手法を簡単に行える Excel ソルバーの使い方を学びます。
- 様々な最適化問題を解く経験を通して、最適化手法の理解を深めます。

2.2 最適化問題 (数理計画問題) とは

所与の条件を満たす範囲で、ある関数を最小 (あるいは最大) にする選択肢や変数 (の組合せ) x を見つける問題を数理計画問題 (mathematical programming) あるいは最適化問題 (optimization problem) と言い、OR を代表する道具立ての 1 つです。典型的な最適化問題は、以下のように表現されます¹:

$$\left| \begin{array}{l} \text{最小化} \quad f(x) \\ \text{条件} \quad h_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ \quad \quad g_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \dots, \ell, \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} \text{最大化} \quad f(x) \\ \text{条件} \quad h_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ \quad \quad g_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \dots, \ell. \end{array} \right|$$

ただし、 $f, g_j, h_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ です。ここで、 f は目的関数 (objective function)、 x は決定変数 (decision variable) と呼ばれ、 x が満たすべき条件 “ $h_i(x) = 0, i = 1, \dots, m, g_j(x) \leq 0, j = 1, \dots, \ell$ ” は制約条件 (constraints) と呼ばれます²。前者を最小化問題、後者を最大化問題と呼びますが、以下の関係が成り立つので、2 つの表現に本質的な違いはありません:

$$\min\{f(x) \mid x \in S\} = -\max\{-f(x) \mid x \in S\}.$$

ただし、 $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid h_i(x) = 0, i = 1, \dots, m, g_j(x) \leq 0, j = 1, \dots, \ell\}$.

f, g_j, h_i がいずれも線形関数のとき、線形計画問題 (linear programming; LP) と呼ばれます。

2.3 ソルバーを使う

- Excel では線形計画問題などの最適化問題を解く機能をソルバーと呼んでいます。ソルバーはアドインと呼ばれる追加の機能として存在していて、初めて使う場合には「アドインの追加」の作業が必要です。
- まず、ソルバーの機能が使えるかを確認します。
- Excel を起動し、新規ファイルを開き、[データ] ([分析] 欄の) [ソルバー] (Excel2003 の場合: [ツール] [ソルバー]) を選択します。
- 「ソルバー : パラメータ設定」の画面が出てきた場合は問題なく利用できます。次のパラグラフ「ソルバーとは」に進んでください。(使用を終了するには、[閉じる] をクリック)
- [データ] [分析] (Excel2003 の場合 [ツール]) の中に [ソルバー] が表示されない場合は以下の処理を施します:

Excel2007 の場合

1. 左上隅の Office ボタンをクリック、出現したメニューの一番下の「Excel のオプション」ボタンをクリック。「Excel のオプション」のウィンドウが表示されるので左のコラムから「アドイン」をクリック (図 1a)。
2. ウィンドウ右側の「アドイン」のリスト中 (「アクティブでないアプリケーション アドイン」) の「ソルバー アドイン」をクリックして [設定] をクリック。「アドイン」のウィンドウが表示される。

¹これに含まれない最適化問題もあります。

²こういった最適化問題の表現を定式化と呼びます。

3. リストの中から [ソルバー アドイン] という項目をみつけチェック.
4. 画面上的 [OK] をクリック.

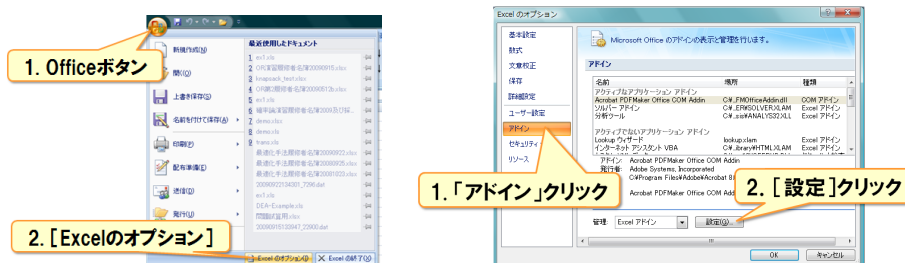


図 1a: Excel2007 の場合 : [Office ボタン] の [アドイン] から [ソルバー アドイン] を設定する.

Excel2003 の場合

1. [ツール] [アドイン] をクリック. 「アドイン」のウィンドウが表示される (図 1b).
 2. リストの中から [ソルバー アドイン] という項目をみつけチェック.
 3. 画面上的 [OK] をクリック.
- 2. で [ソルバー] の項目が表示されない場合は, その端末にソルバーがインストールされていないので, 他の端末に移動してリトライして下さい.

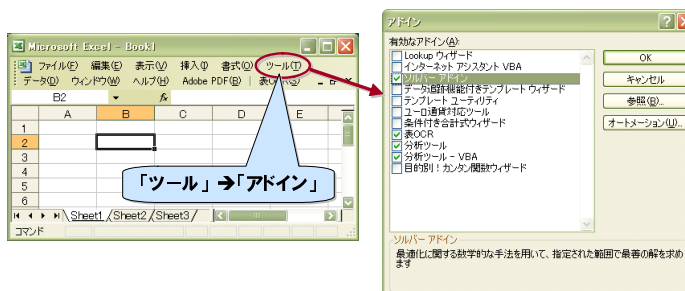


図 1b: Excel2003 の場合: [ツール] から [アドイン] を選び, [ソルバー アドイン] にチェックを入れる.

ソルバーとは

- ソルバーを使うと, ある特定の最適化 (数理計画) 問題を解くことができます.
- つまり, ワークシートの「目的セル」と呼ばれるセルに入力されている数式の最大値 / 最小値を求めることができます. (「目的セル」は最適化理論で言う「目的関数 (値)」に相当します)
- ソルバーでは, 「変化させるセル」と呼ばれるセルの値を変化させつつ, 目的セルの数式の計算を行い, 最適の解を見つけ出します. (「変化させるセル」は最適化理論で言う「決定変数」に相当します)
- また, 「制約条件」の関係式を指定して, 「変化させるセル」の値に制限を課することができます. (最適化理論で言う「制約条件」に相当します)

ソルバーの使い方

1. [データ] ([分析] 欄の) [ソルバー] (Excel2003 の場合 [ツール] [ソルバー]) でソルバーを立ち上げます.

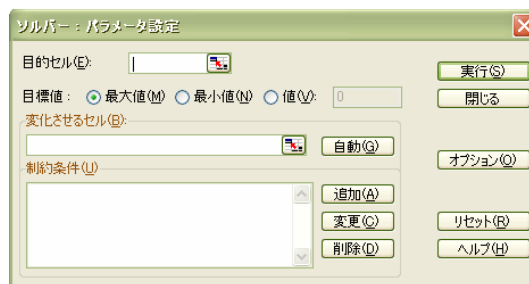


図 2: ソルバーの初期画面

2. 「目的セル」「変化させるセル」「制約条件」を入力します (入力方法は演習課題を通して説明します)。また、「目標値」欄には「目的セル」が最大となる条件を求めたいのか、最小となる条件を求めたいのか、特定の値になる条件を求めたいのかをクリックします。
3. [実行] ボタンをクリックする前に [オプション] ボタンを選択します。オプションの意味についてはヘルプを参照してください。

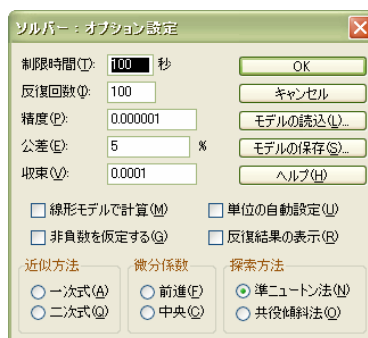


図 3: ソルバーの「オプション設定」

4. [実行] ボタンを選択します。ソルバーが最適化計算を実施し、エラーなく最適解が見つかった場合には、「目的セル」に最適値、「変化させるセル」に最適解が表示されます。

2.4 生産計画問題 –利益が最大となる生産量の組合せを求める–

複数の製品を生産することが可能な状況を考え、ソルバーを用いて利益が最も大きくなる生産量の組合せを求める問題を解いてみましょう。

演習課題 1 第 2 回演習用ワークシートの Sheet1 は、2 種類の製品 X と Y の原料 A,B,C の使用量、および、得られる利益を表にしたものである。ここで、使用できる原料の量 (供給量) には制約がある。利益が最大となる X と Y の生産量を求めなさい。

		製品1リットルあたり使用量[kg/リットル]		1日あたり供給量 [kg]
		X	Y	
原材料名	A	0.2	0.3	27
	B	0.3	0.1	20
	C	0.1	0.4	30
利益 [円/リットル]		90	100	—総利益

図 4: Sheet1

ここではまず問題を線形計画問題として定式化しておきましょう:

- 製品 X, Y それぞれの生産量を x, y [リットル] とします。
- このとき、この会社の利益 f は $f = 90x + 100y$ [円] と表せます。これをできるだけ大きくする (x, y を見つける) ことがこの問題の目的となります。

- それぞれの製品の製造には原料が必要ですが, 利用できる各原料の量には限りがあります. x, y はその制約を満たす必要があります. 例えば, 必要となる原料 A の量を g_A とすると, X を x [リットル] 生産するのに 0.2kg, Y を y [リットル] 生産するのに 0.3kg 必要となるので, 合計で $g_A = 0.2x + 0.3y$ [kg] 必要となります. A は 27kg しか使えないため, $g_A \leq 27$ を満たす必要があります. 同様に B, C についても条件式を考えます.
- 生産量は 0 以上の値しか取りえませんが, $x \geq 0, y \geq 0$ も制約条件として考えます.
- 以上から, この問題は以下の線形計画問題 (LP) として定式化出来ます:

$$\begin{array}{l} \text{最大化} \quad f = 90x + 100y \\ \text{条件} \quad g_A = 0.2x + 0.3y \leq 27 \\ \quad \quad g_B = 0.3x + 0.1y \leq 20 \\ \quad \quad g_C = 0.1x + 0.4y \leq 30 \\ \quad \quad x \geq 0, y \geq 0. \end{array}$$

- 次に, この LP をソルバーで解けるように Sheet1 のセル位置を指定していきます. 必要なセルは「制約条件のセル」「変化させるセル」「目的セル」の 3 つです.
- 黄色いセルに「製品 1 リットルあたり原料使用量」「製品 1 リットルあたり利益」「原料 A,B,C の使用量の上限」と言ったデータ (パラメータ) が与えられていることを確認してください. 例えば, セル範囲 G5:G7 には「原料 A,B,C の使用量の上限」27, 20, 30 がそれぞれ入っています.
- 緑のセル D10 と D11 を X と Y の生産量 (上の LP の x, y の値) を出力するセルとしておきます.
- 青のセル F8 を利益の合計 (上の LP の f の値) を出力するセルとし, f の定義式を入力します:
F8 セルの内容 : “ = D8 * D10 + E8 * E10 ” (または “=sumproduct(D8:E8,D10:E10”)
- 紫のセル G5, G6, G7 を, それぞれ原料 A,B,C の使用量 (上の LP の g_A, g_B, g_C の値) を出力するセルとし, g_A, g_B, g_C の定義式を入力します:
F5 セルの内容 : “ = D5 * D10 + E5 * E10 ” (または “=sumproduct(D5:E5,D10:E10”)
F6 セルの内容 : “ = D6 * D10 + E6 * E10 ” (または “=sumproduct(D6:E6,D10:E10”)
F7 セルの内容 : “ = D7 * D10 + E7 * E10 ” (または “=sumproduct(D7:E7,D10:E10”)
- 関数 sumproduct は 2 つの配列の内積を求める関数です. F5 ~ F8 をまとめて入力するには以下のように絶対参照を使うと便利です:
 - ▷ セル F5 に “=sumproduct(D5:E5,D\$10:E\$10)” と入力します.
 - ▷ セル F5 を「コピー」(Ctrl+C) して, F5 ~ F8 を範囲指定します.
 - ▷ [編集] [形式を選択して貼り付け] を指定すると, ダイアログ・ボックスが現れますので, [数式] にチェックを入れ, [OK] します. そのまま「貼り付け」(Ctrl+V) すると, 枠線などもコピーされてしまいます.
- 以上をまとめて入力したのが次のワークシートです.

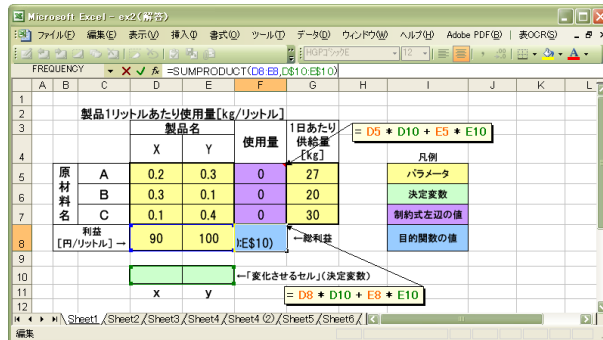


図 5: 数式入力時のワークシート

- 続いて、ソルバーを起動し、ソルバーに関数を入れたセルの位置や制約条件を与えます。
- [データ] ([分析] 欄の) [ソルバー] (Excel2003 の場合: [ツール] [ソルバー]) を選択し、[ソルバー : パラメータ設定] ダイアログ・ボックスを開きます。 ([ソルバー] を立ち上げる前に、目的関数の値を入れたセル F8 をアクティブにしておく、次の動作が省けます。)
- 「目的セル」の位置を入力します。「目的セル」を入力する欄の右横のボタンをクリックし、入力用の小さいウィンドウが現れたらワークシート Sheet1 上の目的関数 f の入ったセル F8 をクリックして、入力できます。
- 「目標値」を選択します。今回は総利益 f を最大にすることが目的なので、[最大値] がチェックされていることを確認してください。 (他のものになっている場合は、[最大値] のチェック欄をクリックしてチェックして下さい。)
- 「変化させるセル」の位置を入力します。「目的セル」の位置と同じように、緑のセル範囲 “D10:E10” を指定します。
- 「制約条件」を入力します。制約条件を設定する場合には [追加] をクリックし、[制約条件の追加] ダイアログボックスで「参照セル」に制約式の左辺の値 (例えば、 g_A) の入ったセル位置 (F5)、 「関係子」 (\leq)、 「制約条件」に制約式の右辺の値 (制約条件の上限 27) を設定し、 [OK] をクリックします。続けて追加したい場合には、 [追加] をクリックします。



図 6: 「制約条件の追加」ダイアログ・ボックス

- この生産計画の問題では 3 つの原料に対する 3 本の不等式制約があるので、それぞれについて入力する方法 (図 7) と、セル位置の並びの規則性を使って、まとめて入力する方法 (図 8) があります。

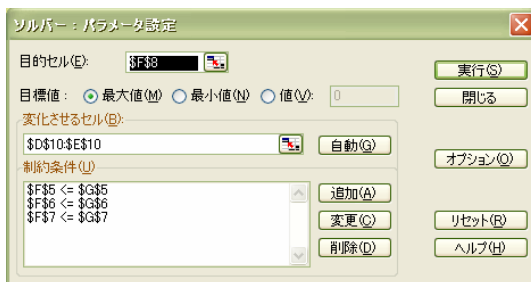


図 7: 1 つ 1 つ制約を追加した場合

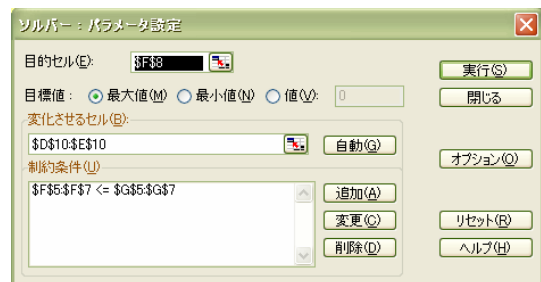


図 8: まとめて制約を追加した場合

- 非負制約 ($x \geq 0, y \geq 0$) についても「制約条件の追加」手続きによって同様に指定することができますが、[オプション]をクリックし、「ソルバー：オプション設定」ダイアログ・ボックスで[非負数を仮定する]をチェックすることで設定できます。
- また、線形計画問題ですので、「ソルバー：オプション設定」ダイアログ・ボックスで[線形モデルで計算]をチェックし、[OK]をクリックします。
- [実行] ボタンを押すと、ソルバーが最適な最適化 (アルゴリズム) を実行し、(あれば) 最適解が見つかり、[探索結果] ダイアログボックスが表示されます。

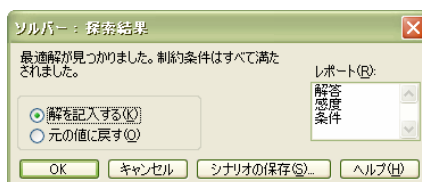


図 9: 「解を記入する」を選択すると計算結果がワークシート上に出力される

- [解を記入する] をチェックし、[OK] を押すと、求めた解をセルに出力します。

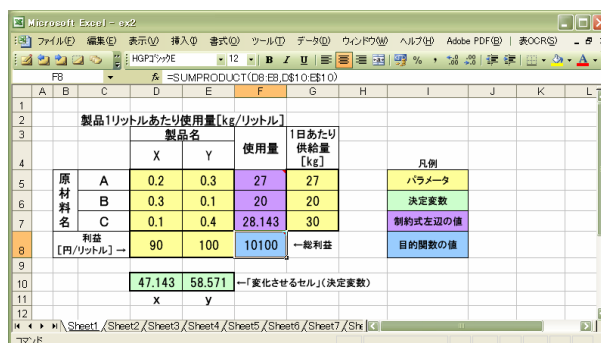


図 10: 出力結果

- ソルバーによる最適化計算の結果、利益が最大となる生産量は、
 - 製品 X : 47.14kg
 - 製品 Y : 58.57kg
 このときの利益は、
 - 最大利益 : 10,100 円
 となります。
- [探索結果] ダイアログ・ボックスで [OK] を押す前に、[レポート] ボックスをクリックしておくことで指定した形式のレポートを作成し、各レポートを同じブックの新規シートに表示します。
 - 【解答】「目的セル」と「変化させるセル」の初期値、計算結果の値、制約条件、および「制約条件式」に関する情報を一覧に表示します。
 - 【感度】「目的セル」の数式または「制約条件式」の変化に対し、解がどの程度敏感に反応しているかを示す情報を表示します。
 - 【条件】「目的セル」と「変化させるセル」の値、「変化させるセル」の上限または下限、および「変化させるセル」の上限または下限に対する「目的セル」の値を一覧に表示します
- [探索結果] ダイアログボックスで [シナリオの保存] をクリックすると、セルの値を [ツール] [シナリオ] で使用できるようになります。

演習課題 2 第 2 回演習用ワークシートの Sheet2 (および右の表) は, 2 種類の製品 X と Y のビタミン, 食物繊維, カルシウム, 価格を表にしたものである. ここで, ビタミン, 食物繊維, カルシウムを一定以上取りたい. 最も安く必要な栄養分を取るための X と Y の摂取量を求めなさい.

	製品名		最低 摂取量
	X	Y	
ビタミン	300	400	1,000
食物繊維	3	1	5
カルシウム	30	20	70
価格	240	260	

2.5 予算内でケーキを買う

2.4 では変化させる値が連続量でしたが, 変化させる値が整数値に限られる場合にはどうすればよいでしょう. 一般に決定変数が整数に限定されているものは整数計画問題と呼ばれ, 線形計画問題に比べ, 数段難しい問題となります (EXCEL ソルバーでは最適解が求まらない場合もあるようです).

演習課題 3 お友達の家に行くことになりました. おみやげにケーキを買って行こうと思います. 予算は 2,450 円で, 予算内なるべく予算に近い金額にしたいと思っています. 8 個入りの箱に, 250 円のショートケーキと 350 円のチョコレートケーキを入れて持って行きたいのですが, それぞれ何個にすればいいでしょうか. (第 2 回演習用ワークシートの Sheet3 を使用すること)

ケーキの組合せ(その1)			
	単価	数量	金額
ショートケーキ	250	1	250
チョコケーキ	350		
合計金額			
合計数量			

- まず, ソルバーで解けるようにセルを追加して定式化します. 「金額」はそれぞれの「単価」と「数量」のセルを掛けて求めます. 「合計金額」「合計数量」は 2 つのケーキについて「金額」「数量」をそれぞれ足し合わせます.
- メニューで, [ツール] [ソルバー].
- 「目的セル」は合計金額にします.
- 「目標値」は最大値.
- 「変化させるセル」はショートケーキとチョコレートケーキの数量です.
- 「制約条件」には, 「合計金額」については “2450” 円以下, 「合計数量」については “8” 個を指定します. ショートケーキとチョコレートケーキの数量が整数であるという制約条件を加えます. これは関係子として「区間 (Int)」を指定することでできます.

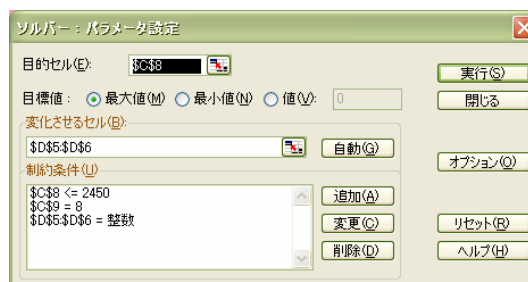


図 11: 変数が整数であるときは関係子に “区間” を, 「制約条件」欄に “整数” を指定

- オプションを設定します. 線形の整数計画問題ですので, [線形モデルで計算] をチェックし, [OK] をクリックします. また, 「非負数を仮定する」にもチェックを入れておきます.

- [実行] ボタンを押すと、(入力に誤りがなければ) 最適解が見つかります。最適解はショートケーキ 4 個とチョコレートケーキ 4 個になります。
- 次の場合についても計算してみましょう:
 - 予算が 2,500 円の場合 (その他のパラメータは上と同じ)
 - 予算 3,000 円で 11 個入りの箱の場合

演習課題 4 お友達の家でケーキパーティーを開くことになりました。予算は 2 万円で 250 円のショートケーキと 350 円のチョコレートケーキ, 300 円のチーズケーキをできるだけ多く買いたいと思っています。ただしそれぞれ最低 5 個、さらに、種類による個数の差 (ばらつき) が 3 個より大きくならないようにしなければなりません。それぞれ何個にすればいいでしょうか。(第 2 回演習用ワークシートの Sheet4 を使用すること)

種類	単価 [円]
ショートケーキ	250
チョコケーキ	350
チーズケーキ	300
予算金額 [円]	20,000

- “ばらつき” は “ケーキの数量の最大と最小の差” となります: “=MAX(D5:D7)-MIN(D5:D7)”
- 「目的セル」は “合計数量” になります。「目標値」は “最大値”
- 「変化させるセル」は各ケーキの “数量”
- 「制約条件」は
 - ▷ ばらつき (種類による個数の差) が 3 個以下
 - ▷ “合計金額” が “予算金額” 以下
 - ▷ 各ケーキの “数量” は 「整数」で、最低 5 個

となります。



図 12: パラメータ設定

- [オプション] を設定します。線形でない関数式が含まれる問題ですので、[線形モデルで計算] のマークを (入っていれば) 外し、[OK] をクリックします。
- [実行] ボタンを押すと、最適解が見つかります。

種類	単価	数量	金額
ショートケーキ	250	24	6000
チョコケーキ	350	22	7700
チーズケーキ	300	21	6300
合計金額	20000		
合計数量		67	← 目的関数
ばらつき		3	
予算金額 [円]	20,000		

図 13: 出力結果

- 種類による個数の差 (ばらつき) は 10 個以下で予算を 4 万円の場合についても求めてみましょう。

【発展 2.1】 上のアプローチでは問題を次のような非線形計画問題として定式化しました:

$$\begin{array}{l}
 \text{最大化} \quad f = \quad x + \quad y + \quad z \\
 \text{条件} \quad g_1 = 250x + 350y + \quad 300z \leq 20,000 \\
 \quad \quad g_2 = \max\{x, y, z\} - \min\{x, y, z\} \leq 3 \\
 \quad \quad \quad x, y, z \text{ は } 5 \text{ 以上の整数.}
 \end{array}$$

ただし, ショートケーキ, チョコケーキ, チーズケーキの購入個数をそれぞれ x, y, z としています. この問題が非線形であるのは, 2 番目の制約が変数に関して線形でないためです. しかしながら, この問題は次のテクニックを使うことで線形の (混合) 整数計画問題による定式化も可能になります:

$$\begin{array}{l}
 \text{最大化} \quad f = \quad x + \quad y + \quad z \\
 \text{条件} \quad g_1 = \quad 250x + 350y + 300z \leq 20,000 \\
 \quad \quad g_2 = \quad \quad \quad \quad \quad \quad + u + v \leq 3 \\
 \quad \quad g_3 = \quad x \quad \quad \quad \quad - u \leq 0 \\
 \quad \quad g_4 = \quad \quad y \quad \quad \quad \quad - u \leq 0 \\
 \quad \quad g_5 = \quad \quad \quad z - u \leq 0 \\
 \quad \quad g_6 = - \quad x \quad \quad \quad \quad - v \leq 0 \\
 \quad \quad g_7 = \quad \quad - y \quad \quad \quad \quad - v \leq 0 \\
 \quad \quad g_8 = \quad \quad \quad - z \quad - v \leq 0 \\
 \quad \quad \quad x, y, z \text{ は } 5 \text{ 以上の整数, } u, v \text{ は自由変数.}
 \end{array}$$

この線形の (混合) 整数計画問題をソルバーで解きなさい.

2.6 輸送問題 –製品をできるだけ安く運ぶ–

生産地から消費地に生産物を輸送する場合に, 輸送費を低く抑えながら需要と供給を一致させるのにはどうしたらよいかという問題をみましょう.

演習課題 5 第 2 回演習用ワークシートの Sheet5 は, A と B の 2 つの工場から L1~L3 の 3 つの食堂に昼食用のお弁当を輸送するのにかかる費用を表にしたものです. A 工場, B 工場の 1 日の生産数 (の上限) は 60 個, 40 個で合計 100 個です. L1~L3 の食堂では前日までに注文を受け, これをもとにそれぞれの工場で生産した製品が送り届けられます. ある日の L1~L3 の注文数は 20, 30, 50 個でした. 輸送費が最も安くなるように A 工場, B 工場からのそれぞれの食堂への輸送量を決めなさい.

工場からの輸送費
(1 個あたり)

		食堂		
		L1	L2	L3
A	30	50	40	
B	60	30	50	

- この問題は輸送問題と呼ばれる古典的な最適化問題です.
- A 工場から L1, L2, L3 食堂への輸送量をそれぞれ x_{A1}, x_{A2}, x_{A3} とし, B 工場から L1, L2, L3 食堂への輸送量をそれぞれ x_{B1}, x_{B2}, x_{B3} とします. ただし, いずれも非負です.
- $x_{A1} \sim x_{B3}$ を動かして, 輸送費用 P が最小になる値の組合せを求めます.

$$\begin{aligned}
 P = & \quad 30 x_{A1} + 50 x_{A2} + 40 x_{A3} \\
 & + 60 x_{B1} + 30 x_{B2} + 50 x_{B3}
 \end{aligned}$$

- 制約条件は、各工場の生産数、各食堂の注文数となります。生産数の合計は注文数の合計以上でないといけません。

$$\begin{cases} x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} & \leq 60, \\ x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} & \leq 40, \\ x_{A1} + x_{B1} & = 20, \\ x_{A2} + x_{B2} & = 30, \\ x_{A3} + x_{B3} & = 50. \end{cases}$$

- この輸送問題をソルバーで解く場合には、下記のような表を作ります。

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2				食堂				
3				L1	L2	L3		
4	工場	A		30	50	40	-	-
5		B		60	30	50	-	
6								
7		A					0	60
8		B					0	40
9				0	0	0		
10			注文数	20	30	50		

図 14: 輸送問題のための Excel 入力

ここで、以下のような数式を入力しています:

- A 工場の供給量: セル G7 “ = D7 + E7 + F7 ” (または “=sum(D7:F7) ”)
- B 工場の供給量: セル G8 “ = D8 + E8 + F8 ” (または “=sum(D8:F8) ”)
- L1 食堂の需要量: セル D9 “ = D7 + D8 ” (または “=sum(D7:D8) ”)
- L2 食堂の需要量: セル E9 “ = E7 + E8 ” (または “=sum(E7:E8) ”)
- L3 食堂の需要量: セル F9 “ = F7 + F8 ” (または “=sum(F7:F8) ”)

- 各工場からの輸送費用 (セル範囲は G4:G5) は、各食堂への “輸送単価” D4:F4 (工場 A から), D5:F5 (工場 B から) と各食堂への “輸送量” D7:F7, D8:F8 の内積 (つまり, “=D4*D7+E4*E7+F4*F7”, “=D5*D8+E5*E8+F5*F8”, または “=sumproduct(D4:F4,D7:F7)” “=sumproduct(D5:F5,D8:F8)”) で計算され, 「目的セル」(H4) はこれらの合計 (“=G4+G5” または “=sum(G4:G5)”) になります。
- ソルバーのパラメータを以下の図 15 のように設定します。

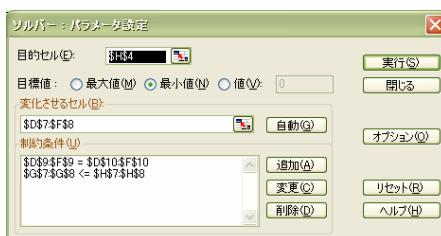


図 15: 輸送問題のパラメータ設定

- オプションとして「線形モデルで計算」と「非負数を仮定する」を指定します。
- 実行ボタンを押すと、最適解が次のように求まります。最も輸送費用が安くなる輸送量は、

$$\begin{matrix} \text{A 工場から} & \left\{ \begin{array}{l} \text{L1 食堂へ: 20 個} \\ \text{L2 食堂へ: 0 個} \\ \text{L3 食堂へ: 40 個} \end{array} \right. & \text{B 工場から} & \left\{ \begin{array}{l} \text{L1 食堂へ: 0 個} \\ \text{L2 食堂へ: 30 個} \\ \text{L3 食堂へ: 10 個} \end{array} \right. \end{matrix}$$

で、この時、輸送費用は 3,600 円となります。

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2				食堂				
3				L1	L2	L3		
4	工場	A	30	50	40	2,200	3,600	
5		B	60	30	50	1,400		
6								
7		A	20	0	40	60	60	
8		B	0	30	10	40	40	
9			20	30	50			
10		注文数	20	30	50			

図 16: 出力結果

- 問題では個数を問題にしているため、変数を整数変数に限定するのが素直な定式化になりますが、輸送問題の場合、与えられたパラメータがすべて整数の場合、連続変数としたまま解いても整数解が求められることが知られています。一般に整数制約が課された問題はそうでない問題に比べると格段に難しくなるので、このような性質は実務上極めてありがたい性質です。

2.7 卒業研究の配属先を決める

輸送問題と同じように考えることで、卒業研究の配属先を決める問題も解くことができます (先生と学生の最適な組合せを求める)。

演習課題 6 第 2 回演習用ワークシートの Sheet6 は、5 人の学生 A ~ E について卒業研究配属先 L1 ~ L3 の希望を調査したものです。学生一人の持ち点は 100 点で点数が高いほどその研究室に配属された時の満足度が高いことを示しています。各研究室の枠は 2 人です。満足度の合計が最大になるように配属先を決めなさい。

	先生 1	先生 2	先生 3
学生 A	80	20	0
学生 B	30	40	30
学生 C	0	100	0
学生 D	20	20	60
学生 E	50	0	50

- 工場 = 先生, 食堂 = 学生と置き換え, 制約条件がすべて “=1” となる以外は, 演習課題 5 と全く同様にして求めることができます。
- 学生 i が先生 j の研究室に配属する場合 1, しない場合 0 をとる 0-1 変数 (バイナリ変数) x_{ij} として, 設定して解くことが一見素直です。しかし, 連続な値をとるように $0 \leq x_{ij} \leq 1$ と緩めても最適解が同じになることが証明できます。後者は LP ですので, より安定的かつ効率的に解くことができます。