最適化手法 第 12 回

ネットワーク最適化 (5)

— 最大流問題の応用 (2) —

後藤 順哉

中央大学 理工学部 経営システム工学科

2014 年 6 月 25 日

今日の概要

今日の目標

- 最大流問題を使って，次の問題を解く
  - リーグ戦における優勝可能性判定問題
  - 露天掘り問題

[復習] 2 つの重要な定理：最大流最小カット定理，整数流定理

ことわり

本講義で用いる資料は，電気通信大学 岡本吉央先生が 2013 年度前期「最適化手法」で用いた資料を，後藤が適宜変更して用いています．

目次

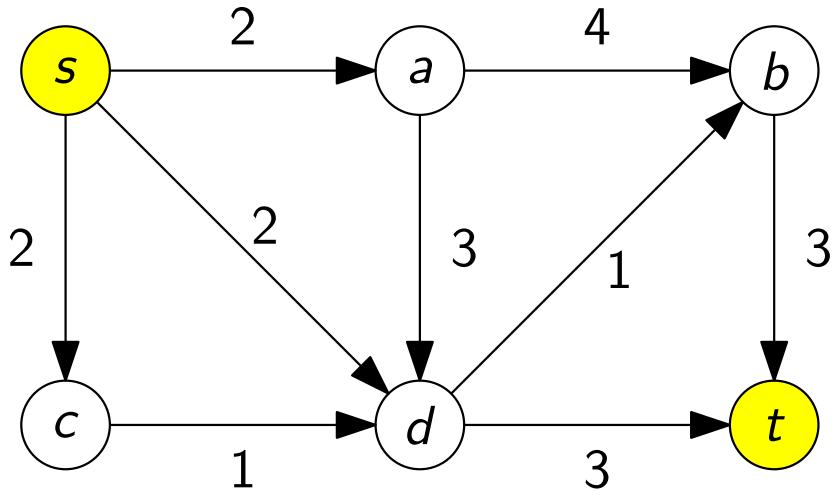
1. リーグ戦における優勝可能性判定問題
2. 露天掘り問題
3. 今日のまとめと今後の予告

最大流問題とは？ — 復習

最大流問題とは？

入力

- 有向グラフ $G = (V, E)$，各辺 $e \in E$ の容量，2 頂点 $s, t \in V$
  (辺の容量は非負実数)



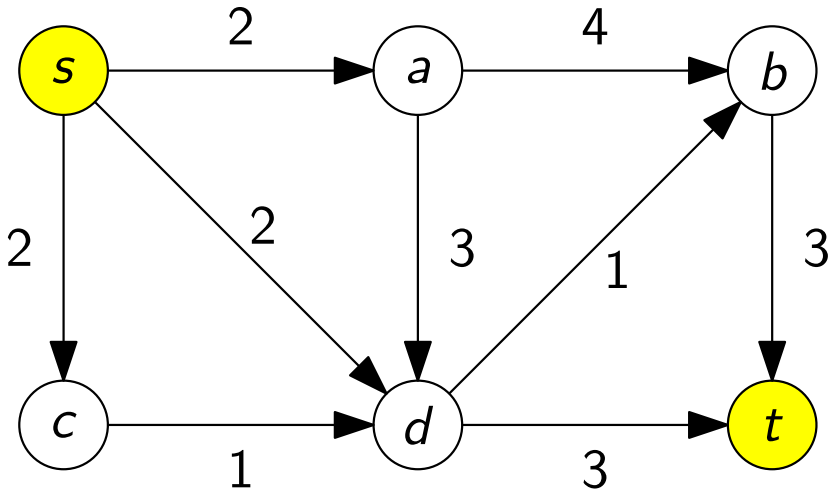
最大流問題とは？ — 復習

最大流問題とは？

出力

- s から t へ至る流れで，その流量が最大のもの

(s から t への最大流)



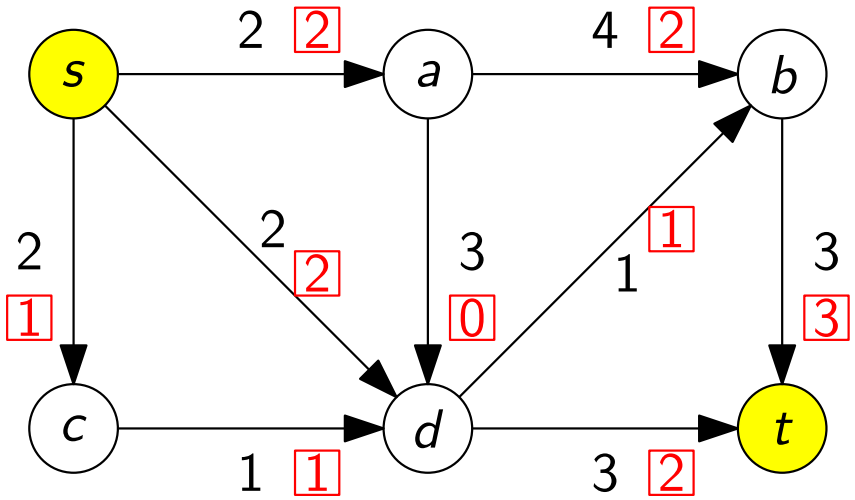
流れとは？ — 復習

s から t への流れ (flow) とは？

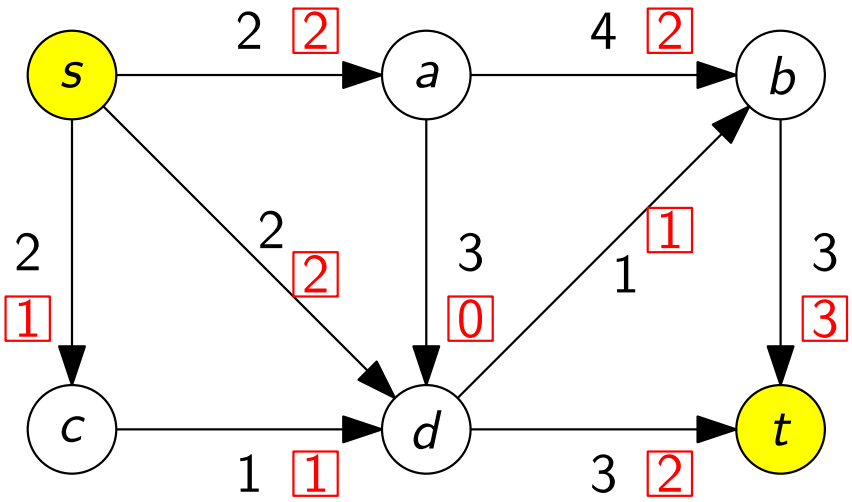
- s から湧き出る総量 $=$ t へ流れ込む総量 (流れの流量とよぶ)
- s, t 以外の頂点 v において, (流量保存制約)

  v から流れ出る総量 $=$ v へ流れ入る総量
- 各辺 e において, (容量制約)

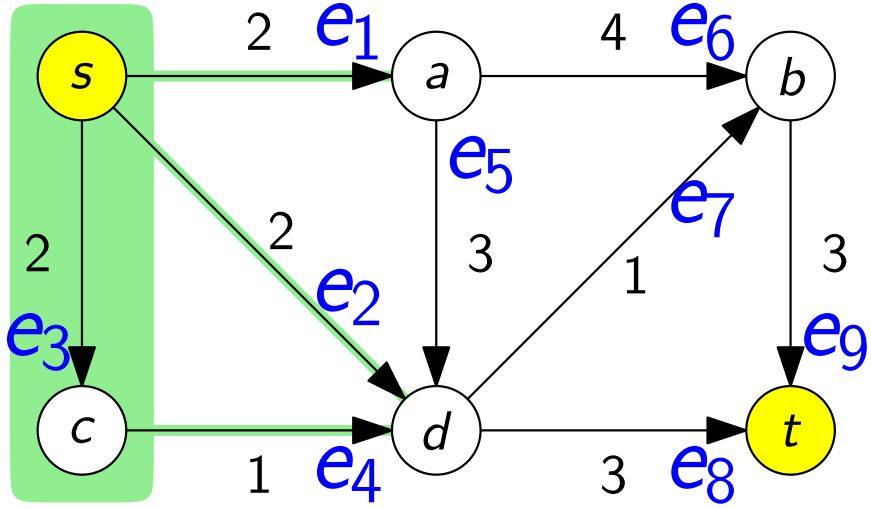
  $0 \leq e$ を流れる量 $\leq e$ の容量



最大流と最小カット — 復習



最大流量 ≥ 5



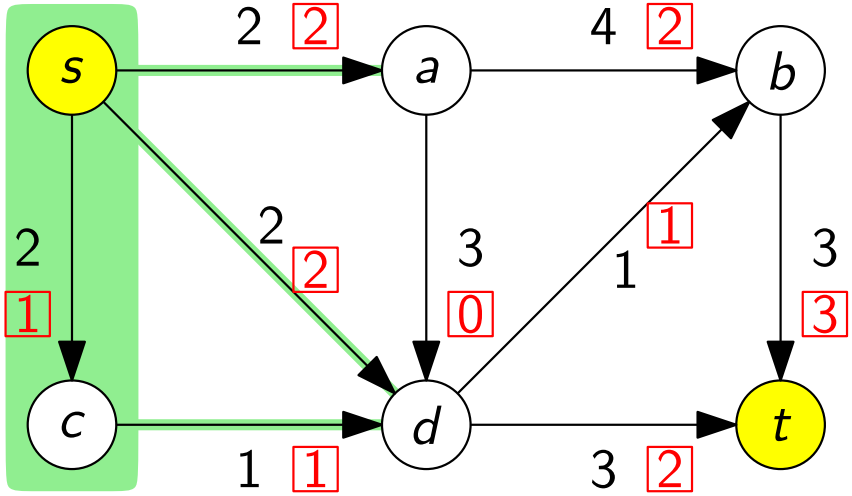
最大流量 ≤ 5

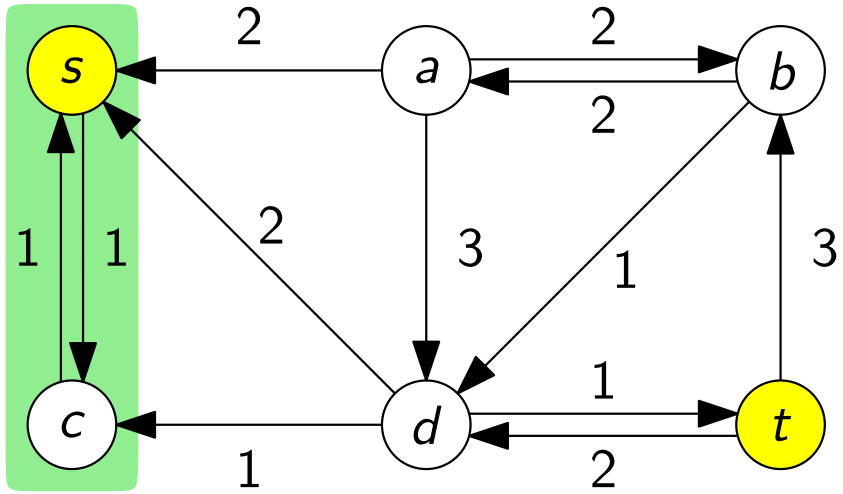
したがって

- 左の図にある流れは最大流であり，その流量は 5
- 右の図にあるカットは最小カットであり，その容量は 5

整数流定理 — 復習

増加道法で，流れを増加させるとき，その増加分は必ず整数だった





整数流定理

容量がすべて整数 $\Rightarrow$ どの辺に流れる量も整数である最大流が存在

目次

1 リーグ戦における優勝可能性判定問題

2 露天掘り問題

3 今日のまとめと今後の予告

MLB (Major League Baseball) アメリカンリーグ東地区

MLB AL East 1996 年 8 月 30 日 金曜日

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	59	28	–	3	8	7	3	7
BAL	71	63	28	3	–	2	7	4	12
BOS	69	66	27	8	2	–	0	0	17
TOR	63	72	27	7	7	0	–	0	13
DET	49	86	27	3	4	0	0	–	20

NYY = ニューヨーク・ヤンキース，BAL = ボルティモア・オリオールズ，
BOS = ボストン・レッドソックス，TOR = トロント・ブルージェイズ，
DET = デトロイト・タイガース

質問

DET はまだ地区優勝が可能か？ (注：引き分けはない)

http://lyle.smu.edu/~olinick/riot/detroit.html

ちょっと観察

MLB AL East 1996 年 8 月 30 日 金曜日

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	59	28	–	3	8	7	3	7
BAL	71	63	28	3	–	2	7	4	12
BOS	69	66	27	8	2	–	0	0	17
TOR	63	72	27	7	7	0	–	0	13
DET	49	86	27	3	4	0	0	–	20

仮定：DET が残り試合すべてで勝ち，NYY が残り試合すべてで負ける

- 最終的に，DET は 76 勝 86 敗で全日程終了
- 最終的に，NYY は 75 勝 87 敗で全日程終了
- しかし，このとき，BOS は NYY から 8 勝している
- つまり，BOS の最終成績は 77 勝以上
- $\therefore$ DET は優勝できない

この仮定が成り立たなくても，DET は優勝できるかもしれない !?

ここからの目標

MLB AL East 1996 年 8 月 30 日 金曜日

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	59	28	–	3	8	7	3	7
BAL	71	63	28	3	–	2	7	4	12
BOS	69	66	27	8	2	–	0	0	17
TOR	63	72	27	7	7	0	–	0	13
DET	49	86	27	3	4	0	0	–	20

ここからの目標

TOR と DET が優勝できるかどうか，最大流問題を使って判定する

最大流問題としての定式化：着眼点

MLB AL East 1996 年 8 月 30 日 金曜日

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	59	28	–	3	8	7	3	7
BAL	71	63	28	3	–	2	7	4	12
BOS	69	66	27	8	2	–	0	0	17
TOR	63	72	27	7	7	0	–	0	13
DET	49	86	27	3	4	0	0	–	20

アイディア：「割り当てる」ことを「流す」ことに対応させる

例えば，NYY と BAL に対して「8」という勝利を割り当てる

TOR の優勝可能性判定 (1)

MLB AL East 1996 年 8 月 30 日 金曜日

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	59	28	–	3	8	7	3	7
BAL	71	63	28	3	–	2	7	4	12
BOS	69	66	27	8	2	–	0	0	17
TOR	63	72	27	7	7	0	–	0	13
DET	49	86	27	3	4	0	0	–	20

TOR は残り全部に勝ち，他チームは他地区で全部負けると仮定できる

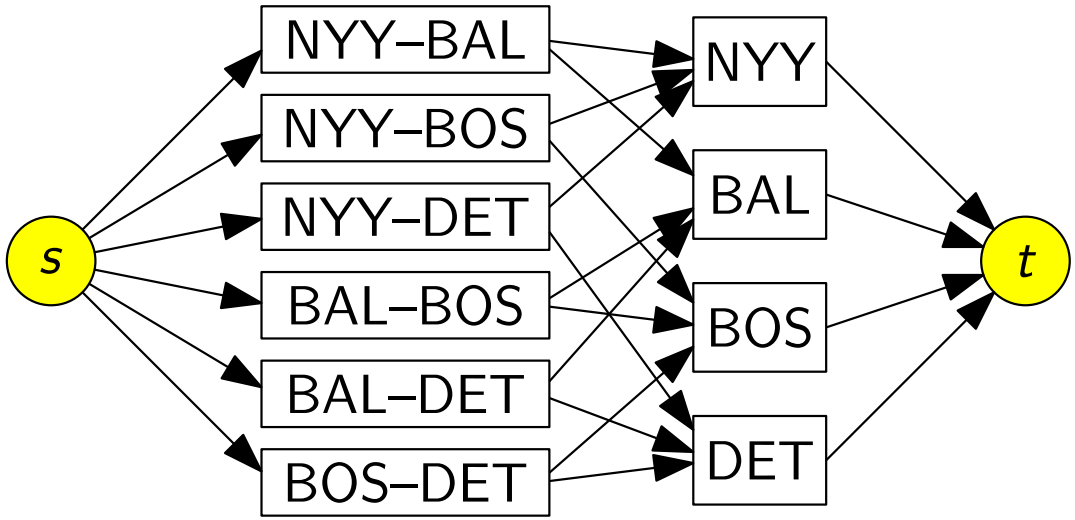
その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	73	14	–	3	8	0	3	0
BAL	71	82	9	3	–	2	0	4	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	90	72	0	0	0	0	–	0	0
DET	49	106	7	3	4	0	0	–	0

TOR の優勝可能性判定 (2)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	73	14	–	3	8	0	3	0
BAL	71	82	9	3	–	2	0	4	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	90	72	0	0	0	0	–	0	0
DET	49	106	7	3	4	0	0	–	0

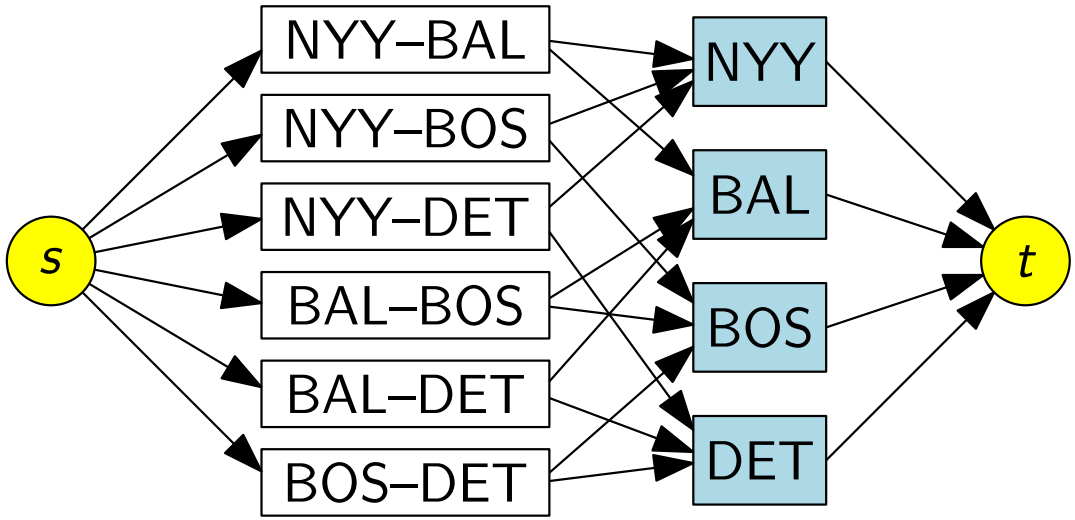


有向グラフの構成

TOR の優勝可能性判定 (3)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	73	14	–	3	8	0	3	0
BAL	71	82	9	3	–	2	0	4	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	90	72	0	0	0	0	–	0	0
DET	49	106	7	3	4	0	0	–	0

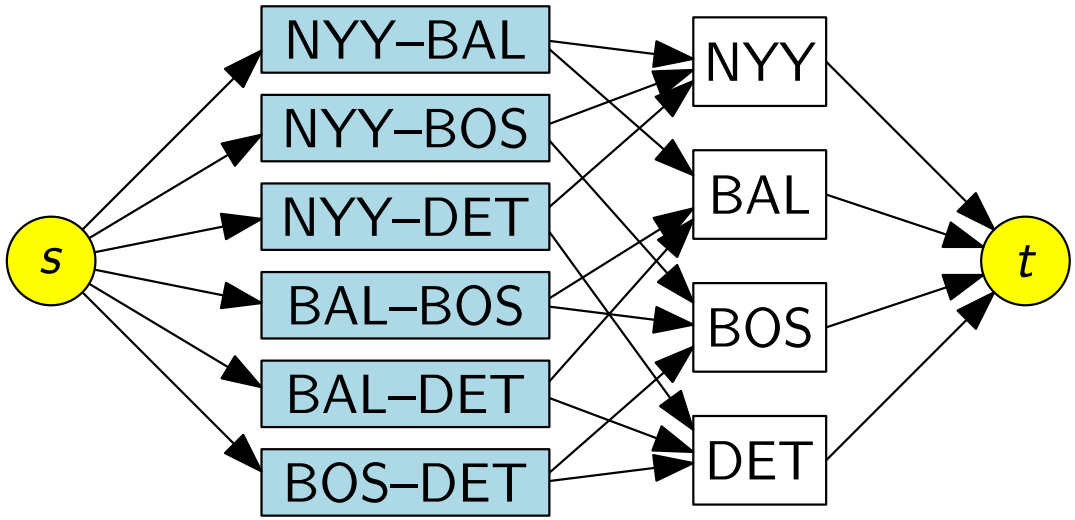


各チームに対応する頂点

TOR の優勝可能性判定 (4)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	73	14	–	3	8	0	3	0
BAL	71	82	9	3	–	2	0	4	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	90	72	0	0	0	0	–	0	0
DET	49	106	7	3	4	0	0	–	0

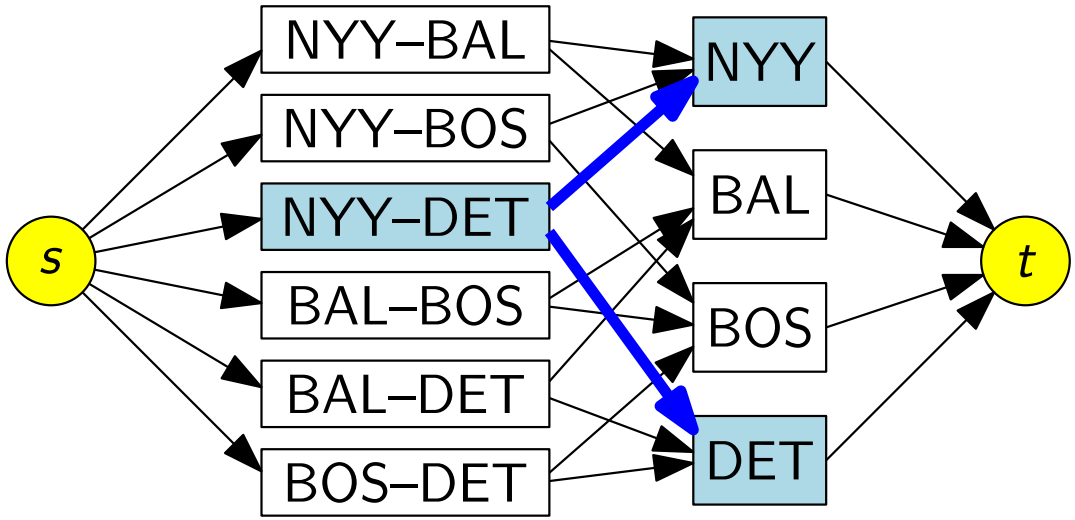


各対戦に対応する頂点

TOR の優勝可能性判定 (5)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	73	14	–	3	8	0	3	0
BAL	71	82	9	3	–	2	0	4	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	90	72	0	0	0	0	–	0	0
DET	49	106	7	3	4	0	0	–	0

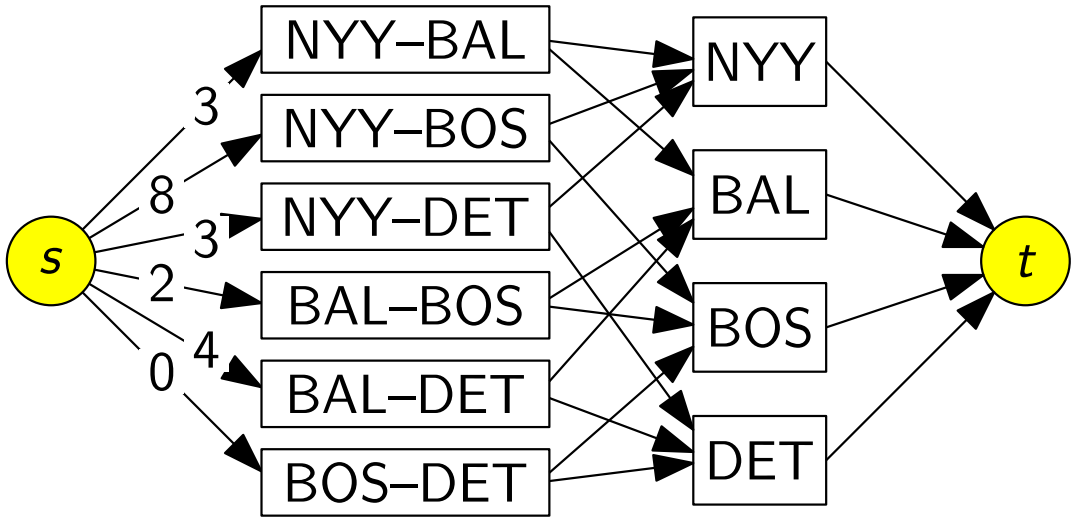


対戦を行うチームに向かって辺を引く

TOR の優勝可能性判定 (6)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	73	14	–	3	8	0	3	0
BAL	71	82	9	3	–	2	0	4	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	90	72	0	0	0	0	–	0	0
DET	49	106	7	3	4	0	0	–	0

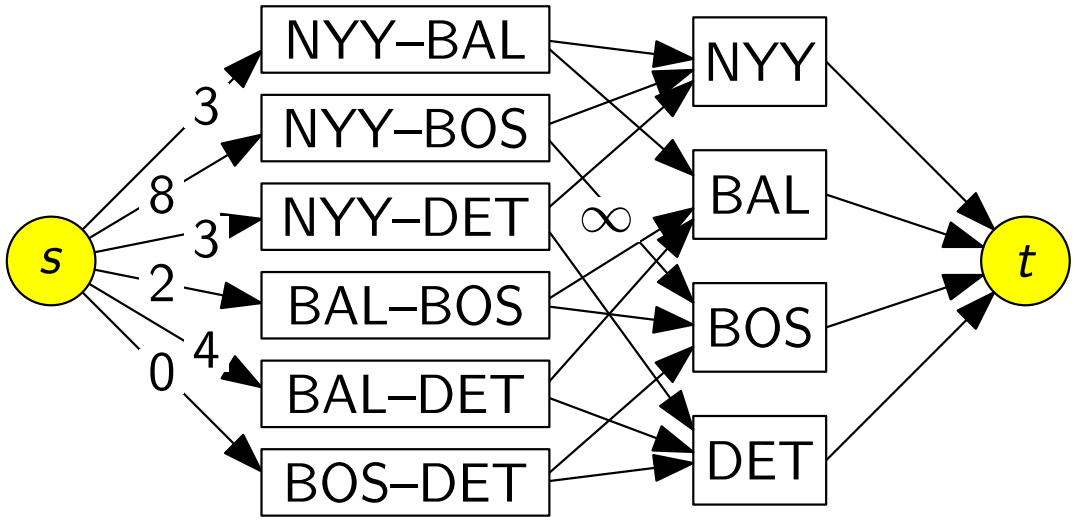


残り対戦数

TOR の優勝可能性判定 (7)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	73	14	–	3	8	0	3	0
BAL	71	82	9	3	–	2	0	4	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	90	72	0	0	0	0	–	0	0
DET	49	106	7	3	4	0	0	–	0

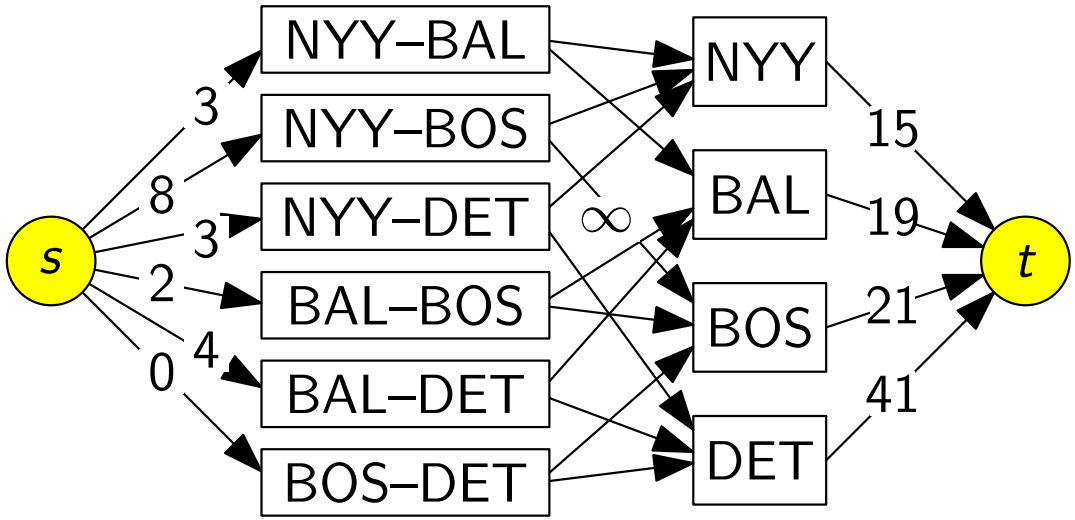


「真ん中」の辺の容量はどれも ∞

TOR の優勝可能性判定 (8)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	73	14	–	3	8	0	3	0
BAL	71	82	9	3	–	2	0	4	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	90	72	0	0	0	0	–	0	0
DET	49	106	7	3	4	0	0	–	0

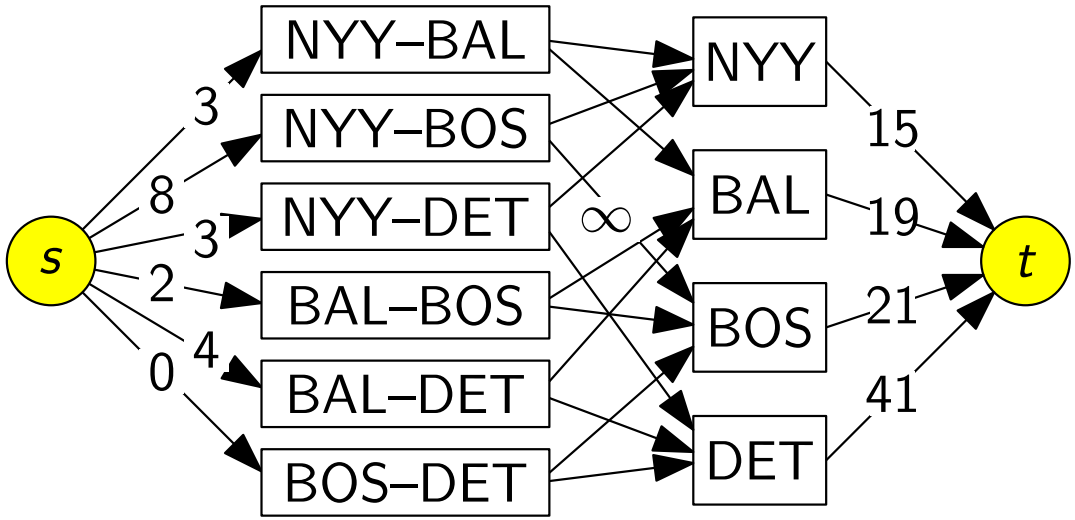


TOR が優勝するとき，そのチームがあとどれだけ勝ってもよいか

TOR の優勝可能性判定 (9)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	73	14	–	3	8	0	3	0
BAL	71	82	9	3	–	2	0	4	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	90	72	0	0	0	0	–	0	0
DET	49	106	7	3	4	0	0	–	0

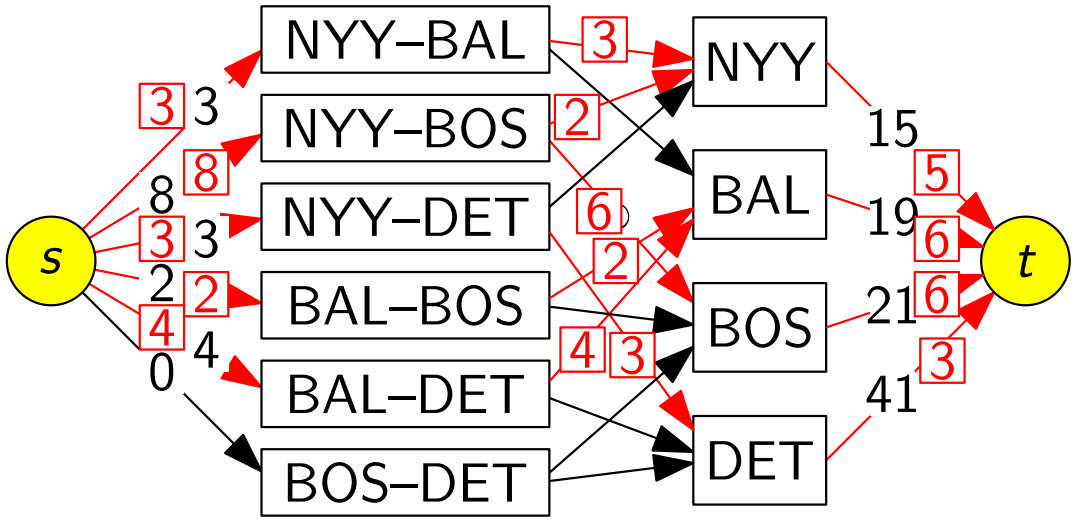


最大流の流量が $3+8+3+2+4+0=20 \Leftrightarrow$ TOR は優勝可能

TOR の優勝可能性判定 (10)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	73	14	–	3	8	0	3	0
BAL	71	82	9	3	–	2	0	4	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	90	72	0	0	0	0	–	0	0
DET	49	106	7	3	4	0	0	–	0

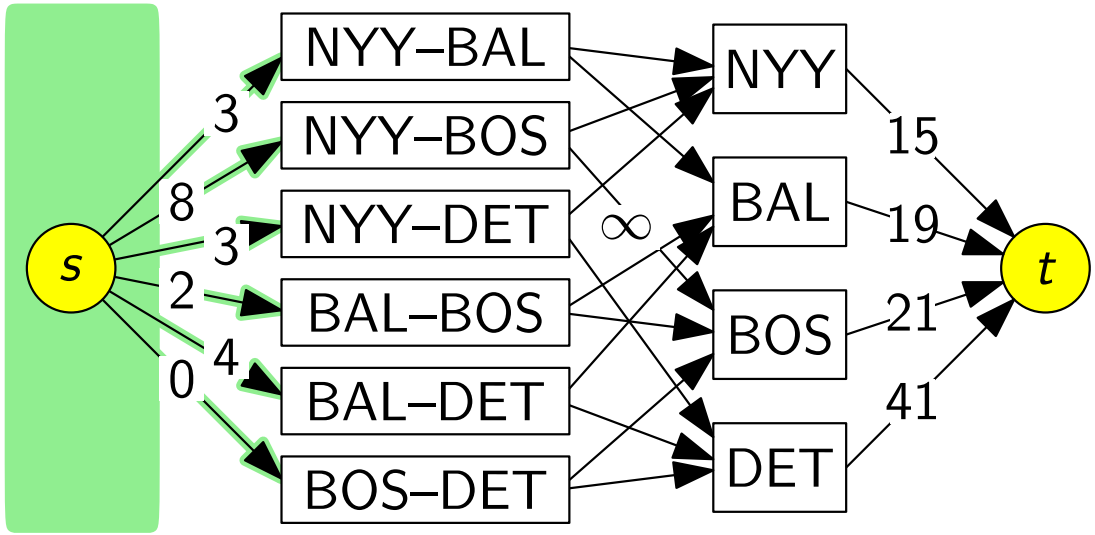


これが最大流で，その流量は 20

TOR の優勝可能性判定 (11)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	73	14	–	3	8	0	3	0
BAL	71	82	9	3	–	2	0	4	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	90	72	0	0	0	0	–	0	0
DET	49	106	7	3	4	0	0	–	0

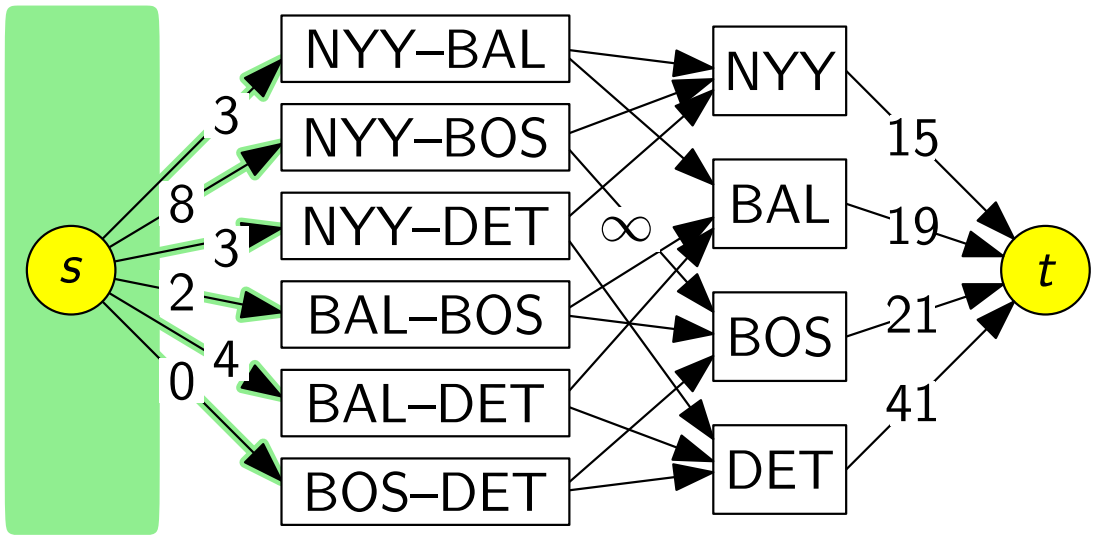


なぜならば，容量が 20 のカットが存在するから

TOR の優勝可能性判定 (12)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	73	14	–	3	8	0	3	0
BAL	71	82	9	3	–	2	0	4	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	90	72	0	0	0	0	–	0	0
DET	49	106	7	3	4	0	0	–	0



結論：TOR は優勝できる

DET の優勝可能性判定 (1)

MLB AL East 1996 年 8 月 30 日 金曜日

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	59	28	–	3	8	7	3	7
BAL	71	63	28	3	–	2	7	4	12
BOS	69	66	27	8	2	–	0	0	17
TOR	63	72	27	7	7	0	–	0	13
DET	49	86	27	3	4	0	0	–	20

DET は残り全部に勝ち，他チームは他地区で全部負けると仮定できる

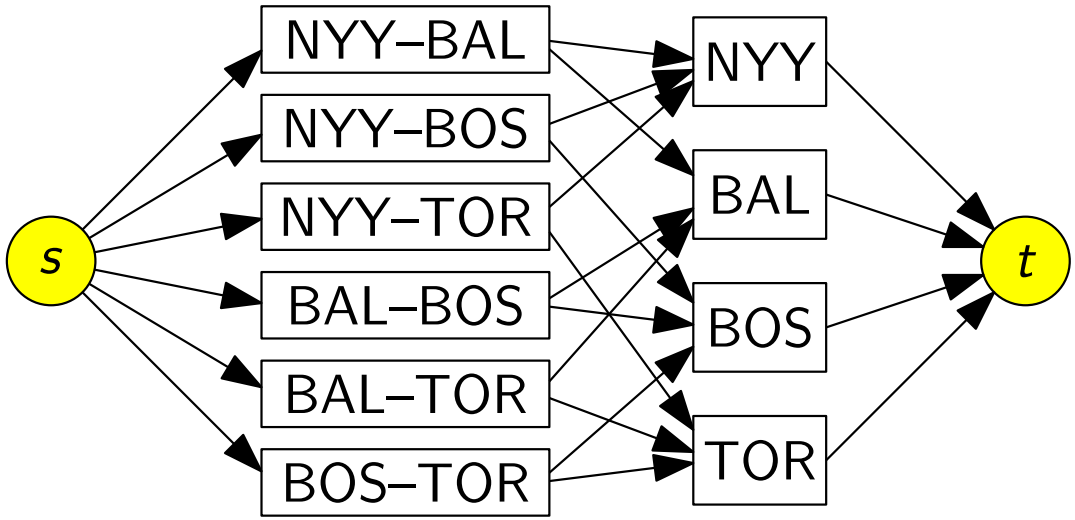
その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	–	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	–	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	–	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	–	0

DET の優勝可能性判定 (2)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	–	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	–	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	–	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	–	0

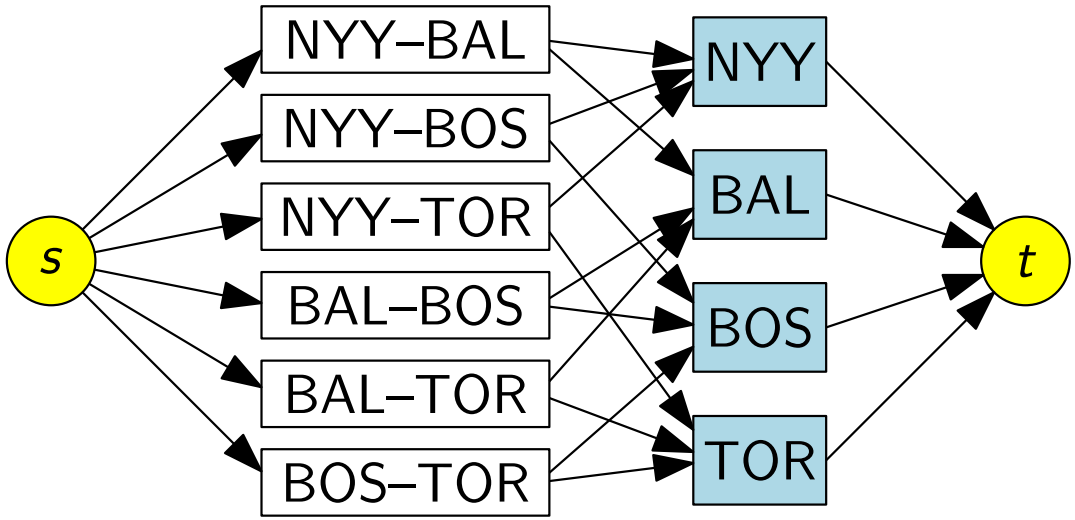


有向グラフの構成

DET の優勝可能性判定 (3)

その過程が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	–	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	–	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	–	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	–	0

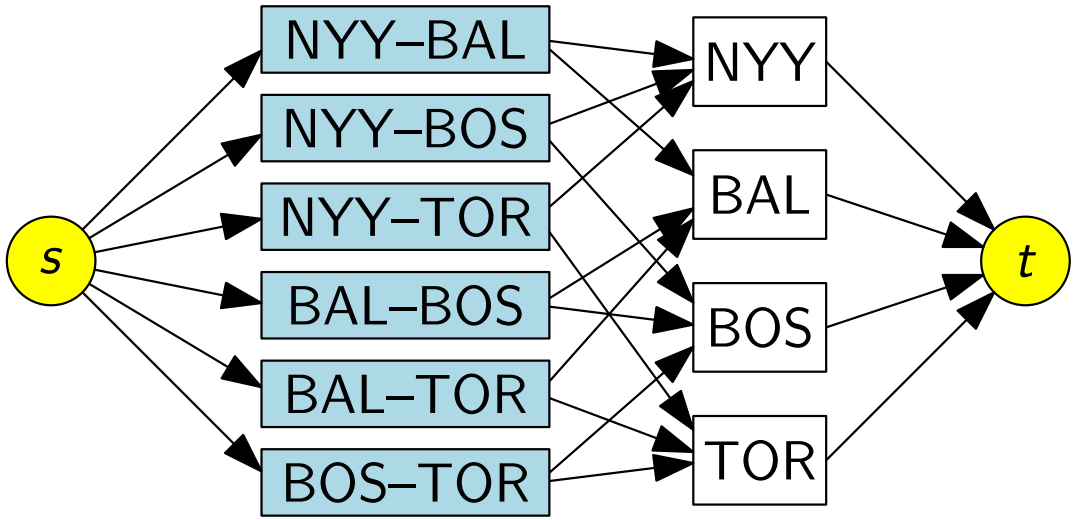


各チームに対応する頂点

DET の優勝可能性判定 (4)

その過程が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	–	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	–	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	–	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	–	0

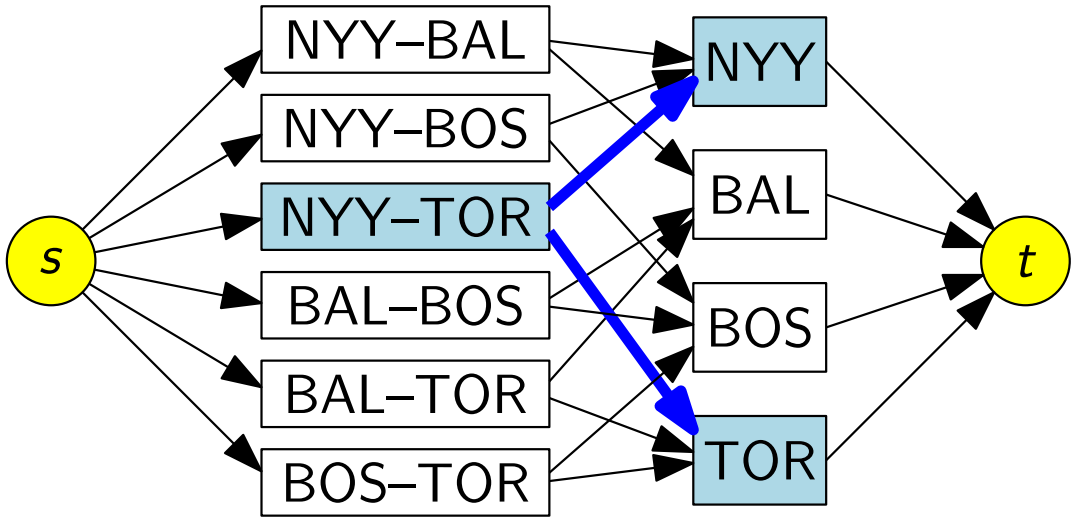


各対戦に対応する頂点

DET の優勝可能性判定 (5)

その過程が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	–	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	–	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	–	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	–	0

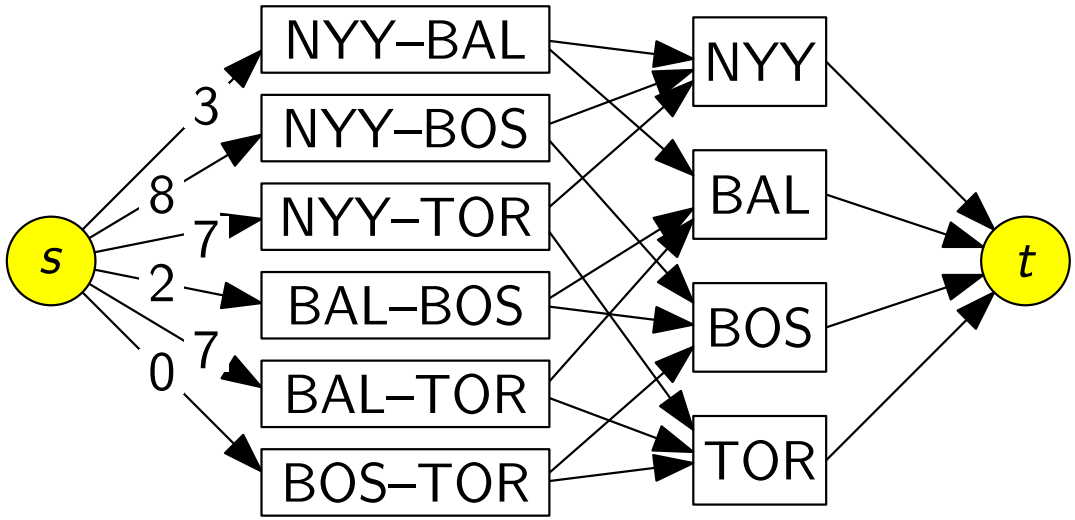


対戦を行うチームに向かって辺を引く

DET の優勝可能性判定 (6)

その過程が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	–	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	–	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	–	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	–	0

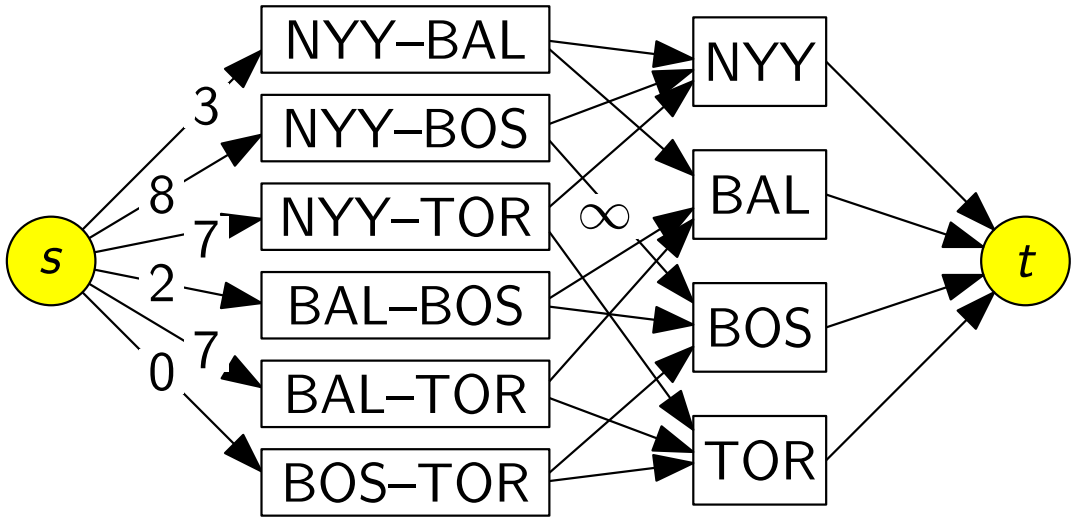


残り対戦数

DET の優勝可能性判定 (7)

その過程が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	–	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	–	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	–	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	–	0

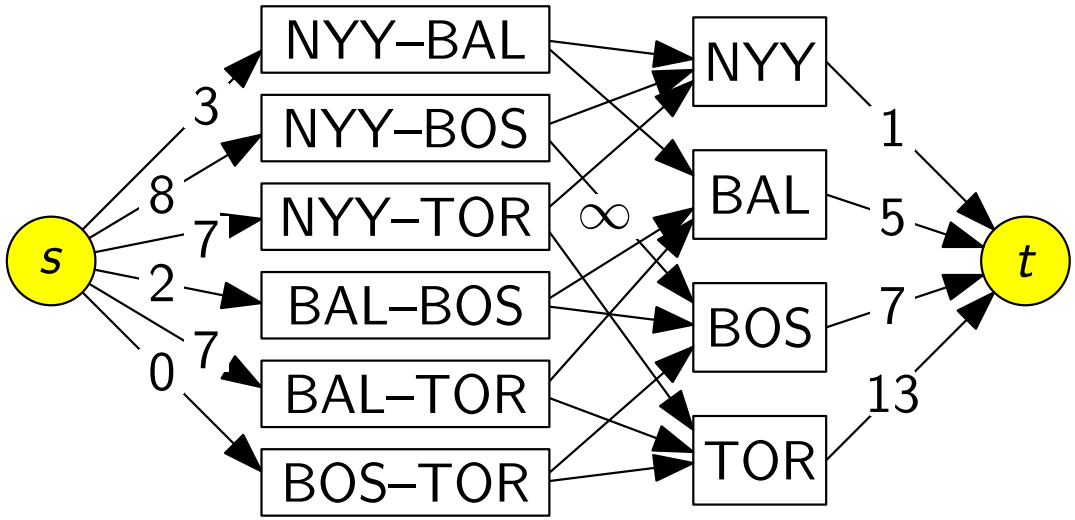


「真ん中」の辺の容量はどれも ∞

DET の優勝可能性判定 (8)

その過程が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	–	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	–	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	–	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	–	0

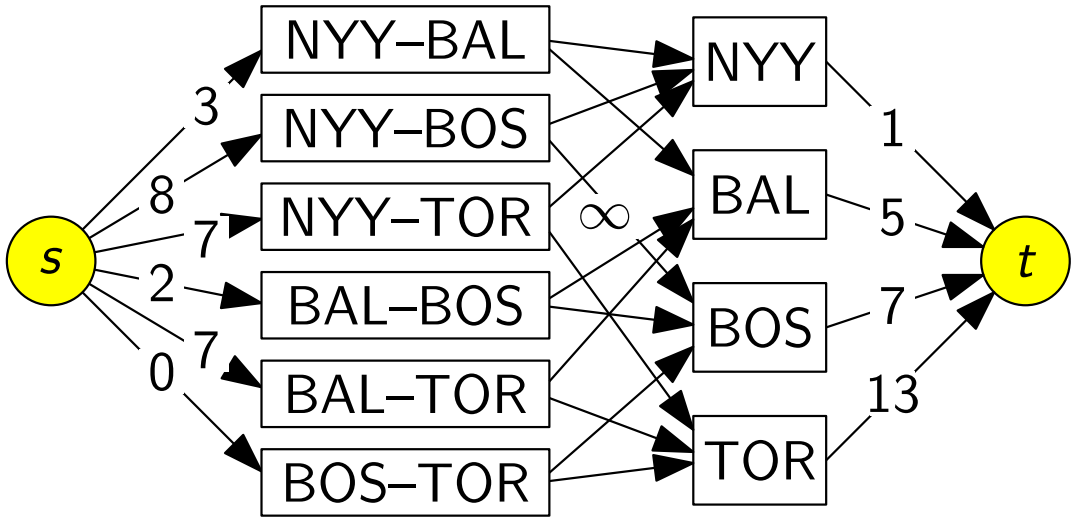


DET が優勝するとき，そのチームがあとどれだけ勝ってもよいか

DET の優勝可能性判定 (9)

その過程が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	–	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	–	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	–	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	–	0

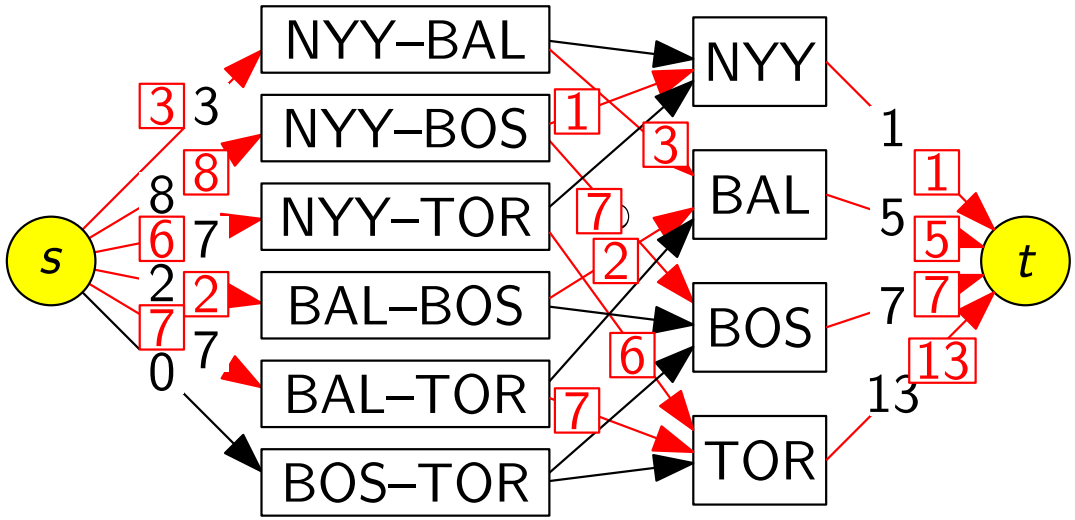


最大流の流量が $3 + 8 + 7 + 2 + 7 + 0 = 27 \Leftrightarrow$ DET は優勝可能

DET の優勝可能性判定 (10)

その過程が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	–	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	–	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	–	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	–	0

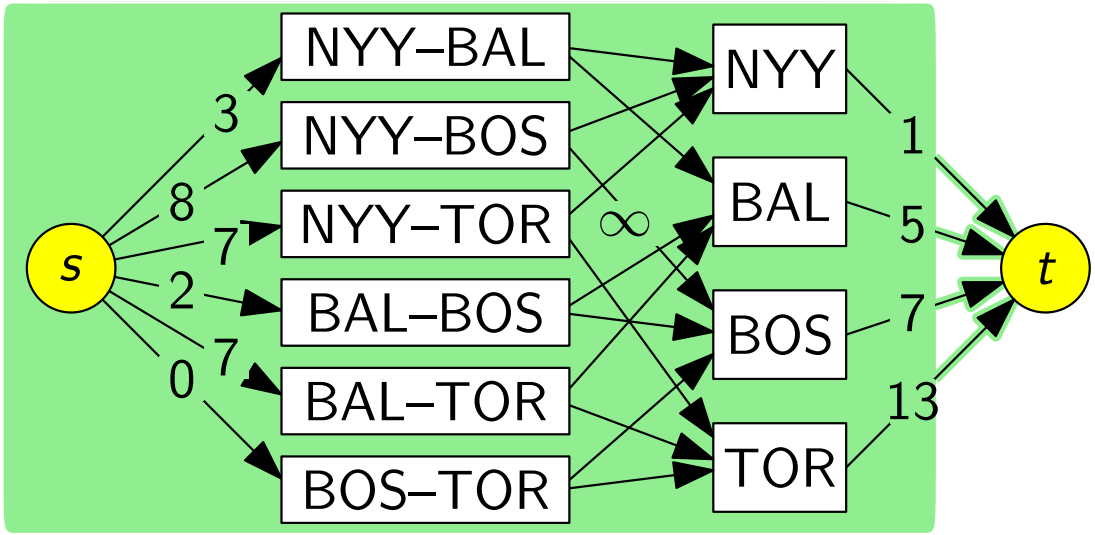


これが最大流で，その流量は 26

DET の優勝可能性判定 (11)

その過程が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	–	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	–	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	–	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	–	0

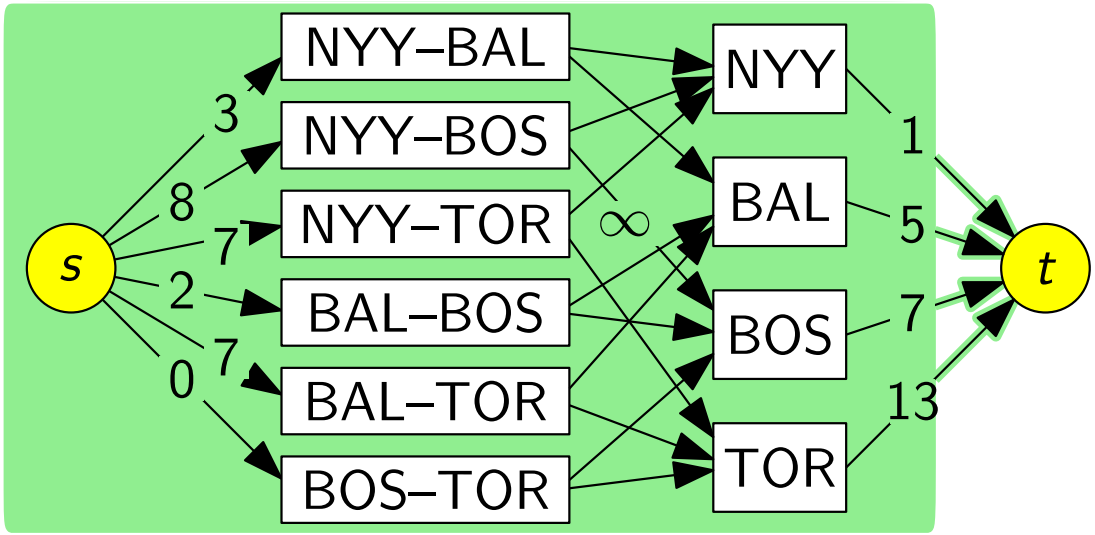


なぜならば，容量が 26 のカットが存在するから

DET の優勝可能性判定 (12)

その過程が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	–	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	–	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	–	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	–	0



結論：DET は優勝できない

優勝可能性判定問題：歴史と結果 (1)

- 最大流問題を用いた優勝可能性判定
  - Schwartz (1966)
- t 位以上になれるか，の判定は NP 困難 (難しい)
  - McCormick (1999)
- 優勝可能性判定のための高速アルゴリズム
  - Wayne (2001)
  - Adler, Erera, Hochbaum, Olinick (2002)
  - Gusfield, Martel (2002)

優勝可能性判定問題：歴史と結果 (2)

(a, b, c)-規則：勝ち a 点，引き分け b 点，負け c 点

(MLB は $(1, 0, 0)$-規則)

- $(2, 1, 0)$-規則 $\rightsquigarrow$ 最大流問題 (1990 年までの FIFA)
  - Schwartz (1966)
- $(3, 1, 0)$-規則 $\rightsquigarrow$ NP 困難 (1990 年以降の FIFA)
  - Kern, Paulusma (2001)
  - Bernholt, Gülich, Hofmeister, Schmitt (1999)
- $a = b$ または $b = c$ または $a + c = 2b \rightsquigarrow$ 最大流問題
  そうでないとき $\rightsquigarrow$ NP 困難
  - Kern, Paulusma (2001)

目次

1 リーグ戦における優勝可能性判定問題

2 露天掘り問題

3 今日のまとめと今後の予告

サンライズ・ダム鉱山 (オーストラリア)

http://en.wikipedia.org/wiki/File:Sunrise_Dam_Mill.jpg

サンライズ・ダム鉱山 (オーストラリア)

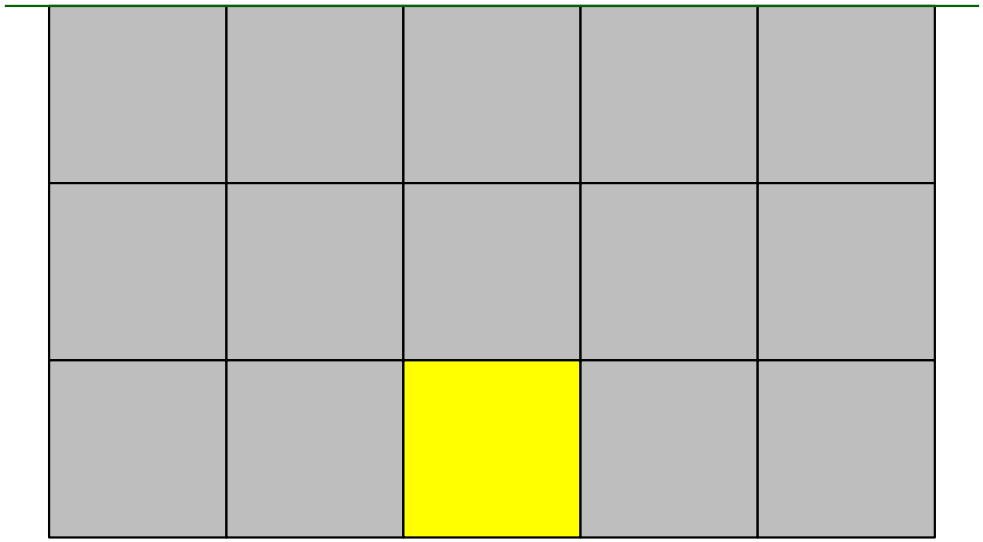
http://en.wikipedia.org/wiki/File:Sunrise_Dam_open_pit.jpg

サンライズ・ダム鉱山 (オーストラリア)

http://en.wikipedia.org/wiki/File:Sunrisegoldmine.jpg

露天掘り問題 (open-pit mining problem)

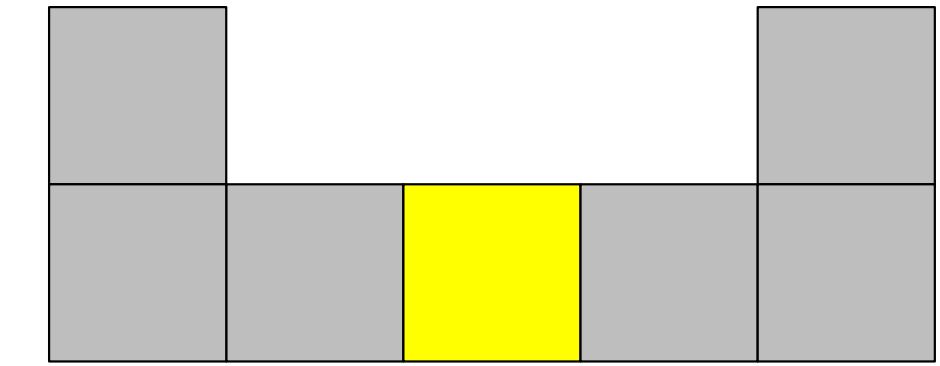
簡単にするため，深さと幅だけの設定で



金が地下の奥底にある状況

露天掘り問題 (open-pit mining problem)

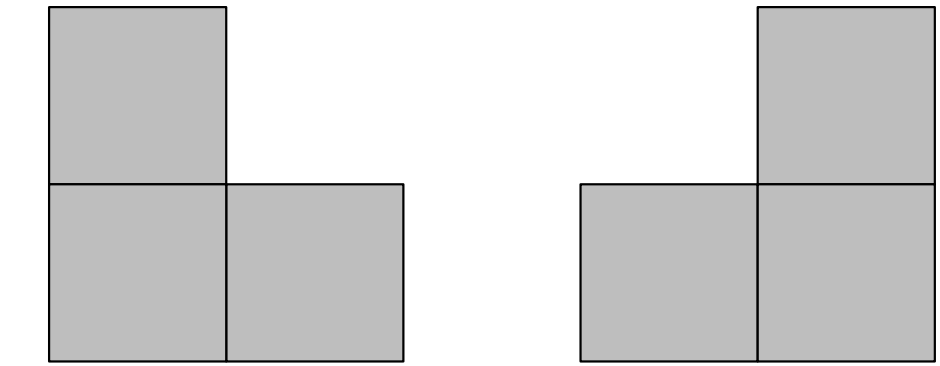
簡単にするため，深さと幅だけの設定で



深く掘ろうと思うと，上の部分をもっと掘る必要がある

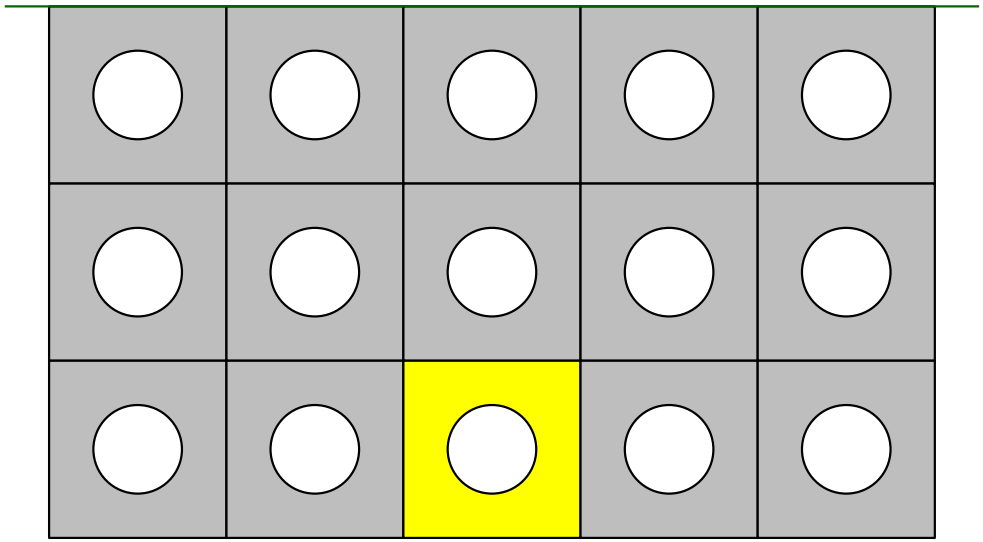
露天掘り問題 (open-pit mining problem)

簡単にするため，深さと幅だけの設定で



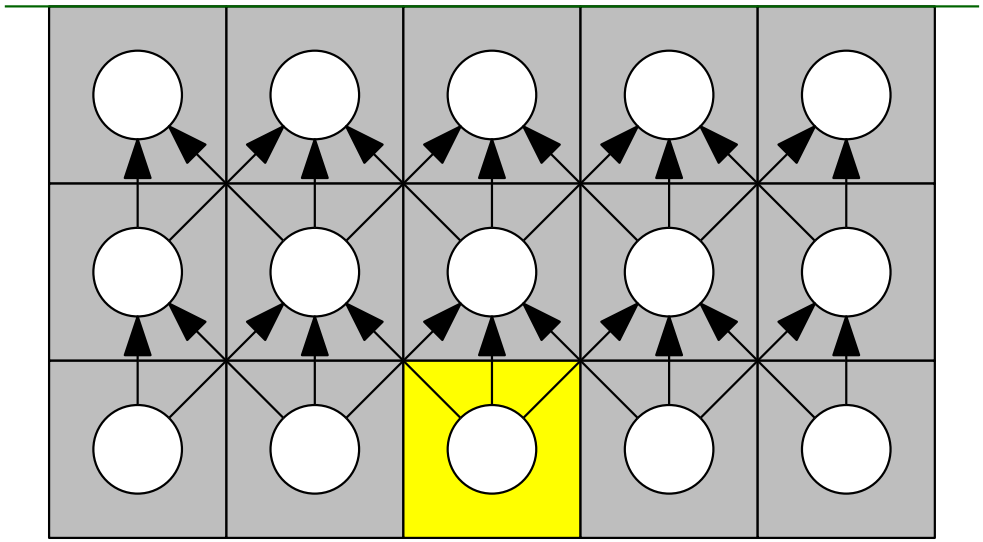
金が取れた！

露天掘り問題：グラフを用いて定式化



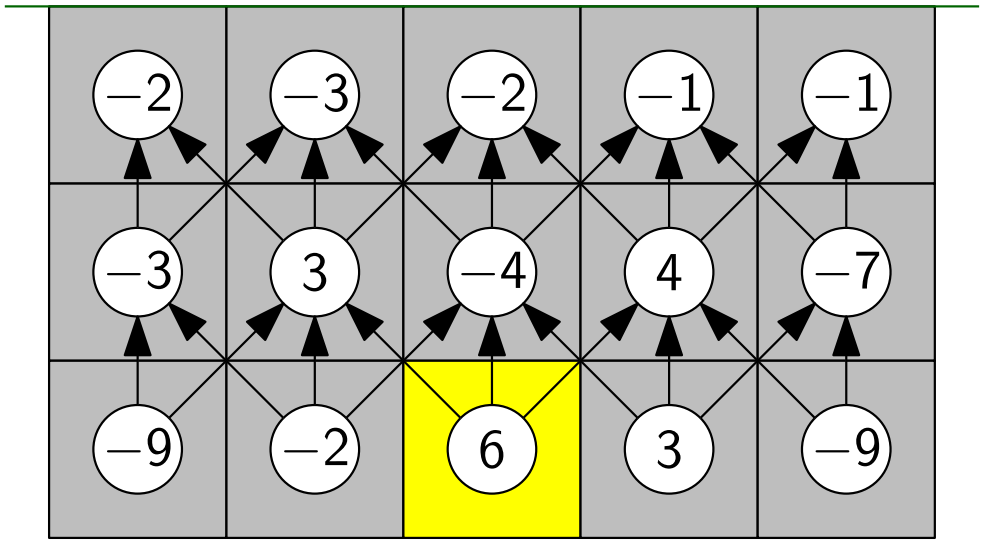
各部分を頂点に対応させる

露天掘り問題：グラフを用いて定式化



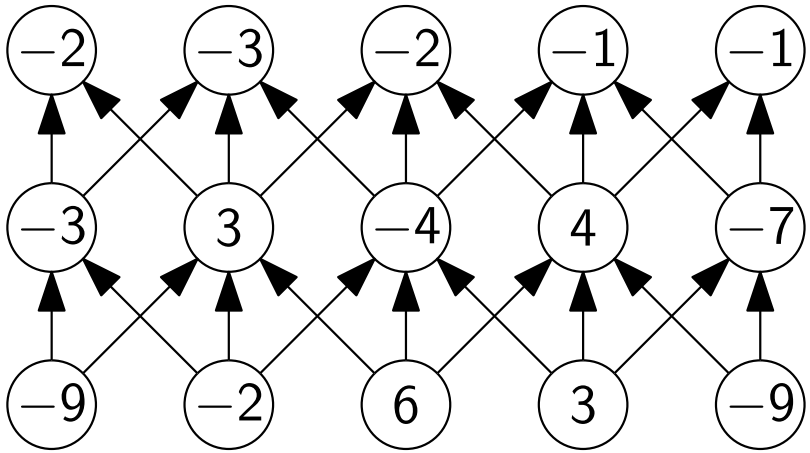
「辺の終点を掘らないと始点が掘れない」という関係を辺で表す

露天掘り問題：グラフを用いて定式化



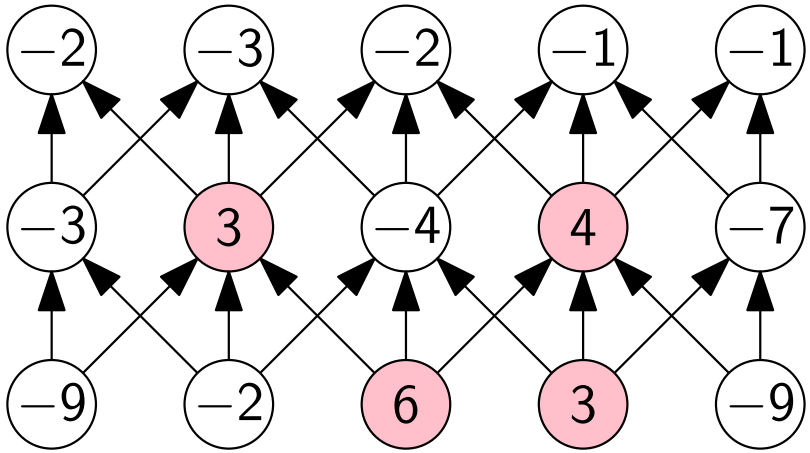
各頂点には，その部分を掘ったときに得られる利益が付いている

露天掘り問題：グラフを用いて定式化



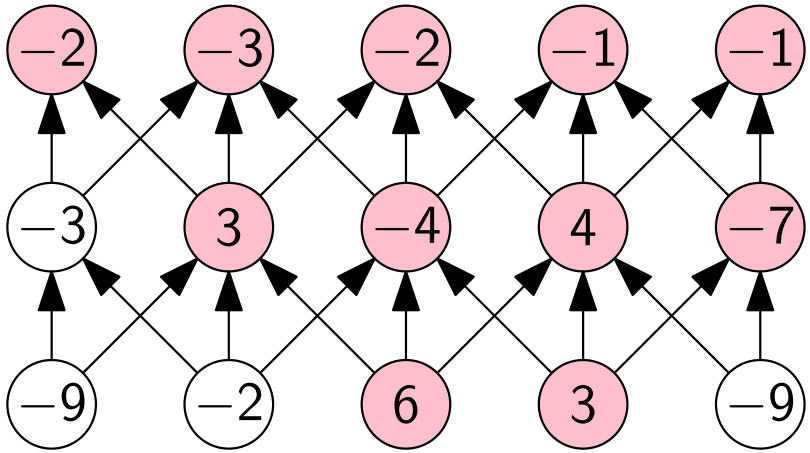
グラフだけを残す (本質的な情報を持っている部分だけ残った)

露天掘り問題：グラフを用いて定式化



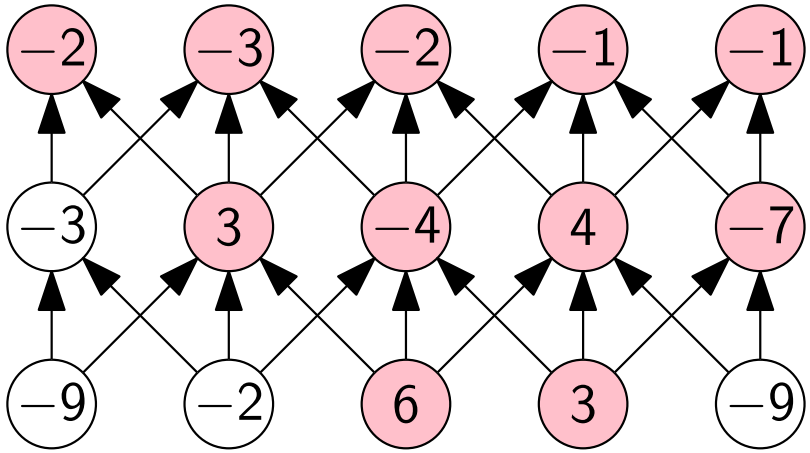
これは許されない掘り方

露天掘り問題：グラフを用いて定式化



これは許される掘り方で，総利益 $= -4$

ここからの目標



ここからの目標

どのように掘れば最も利益があがるか，最大流問題を使って定式化する

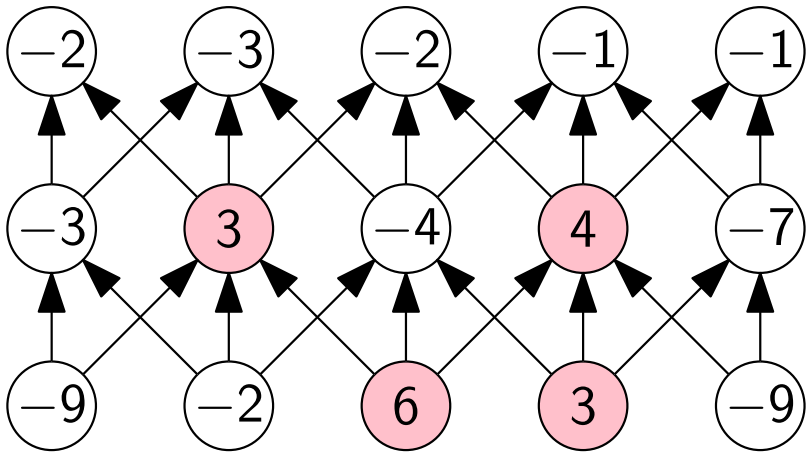
- 実際は，最小カット問題として定式化する

露天掘り問題：定式化のためのアイディア

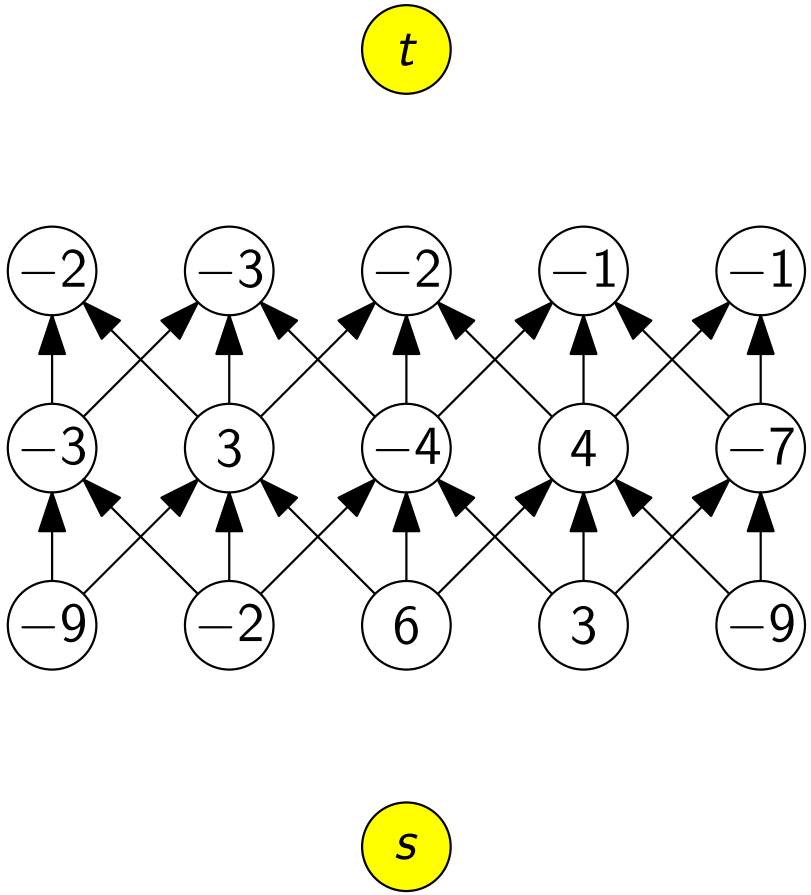
定式化のためのアイディア

自由に取れるならば，利益の合計を $3+4+6+3=16$ にできる

- -3 を取る $\equiv 3$ だけ損をする (と考える)
- 6 を取らない $\equiv 6$ だけ損をする (と考える)
- 目標：損の合計を最小化する

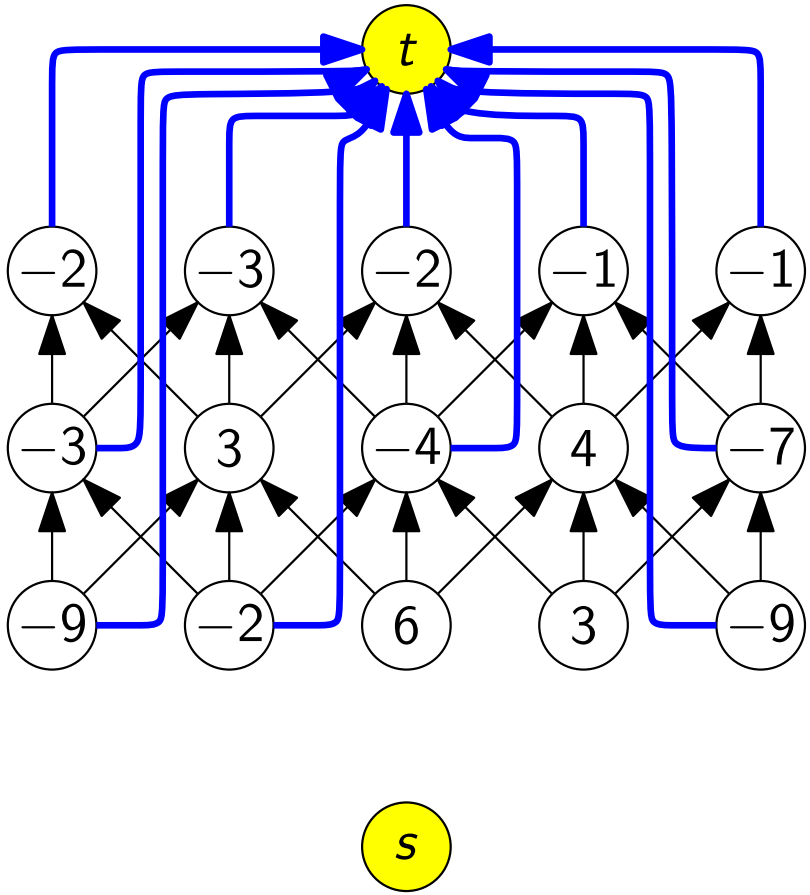


露天掘り問題：最小カット問題としての定式化 (1)



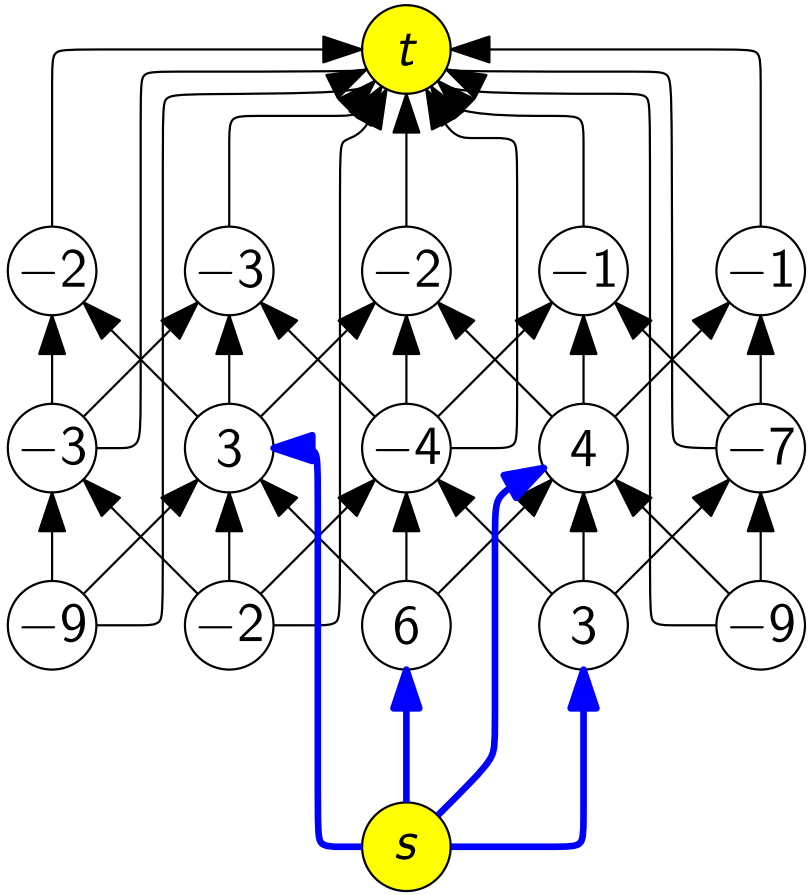
s と t を新たに付ける

露天掘り問題：最小カット問題としての定式化 (2)



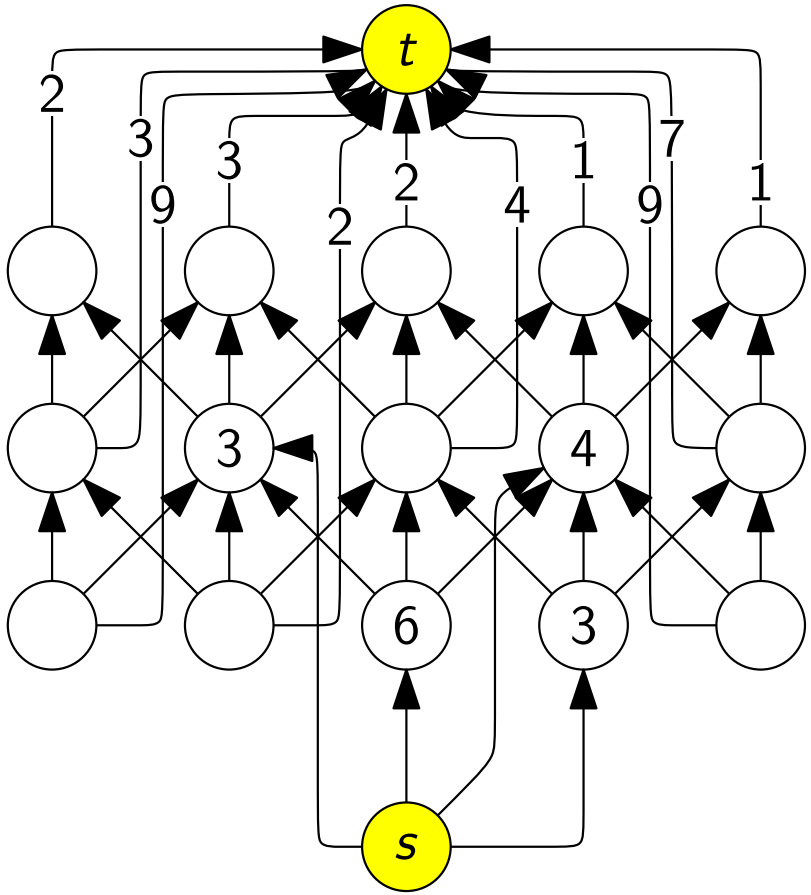
利益が負である頂点から t に向かって辺を付ける

露天掘り問題：最小カット問題としての定式化 (3)



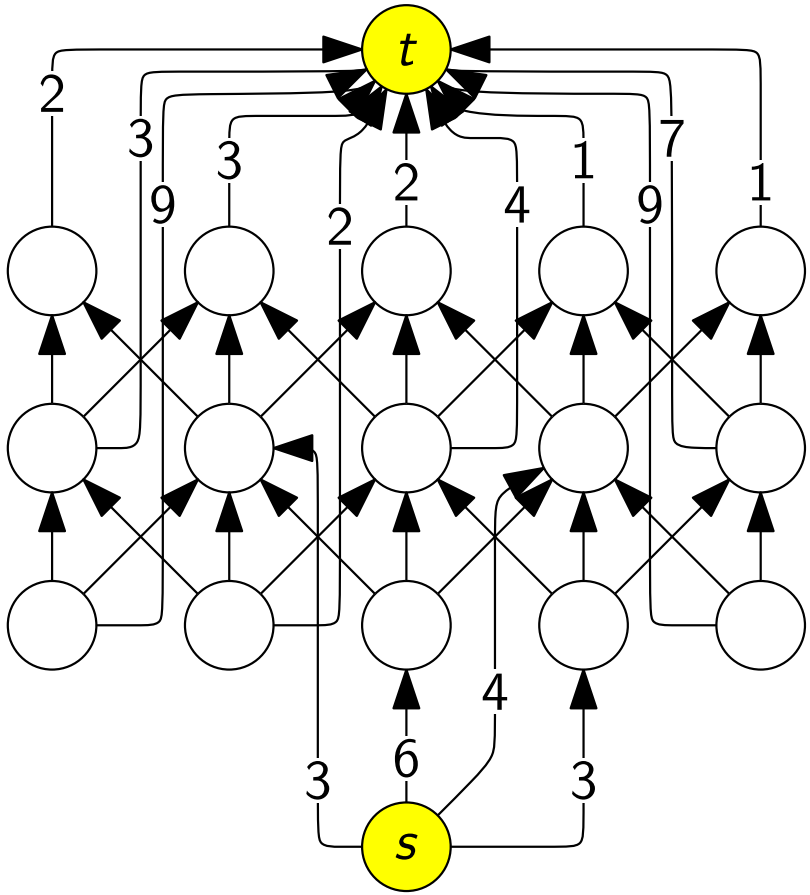
利益が正である頂点に向かって s から辺を付ける

露天掘り問題：最小カット問題としての定式化 (4)



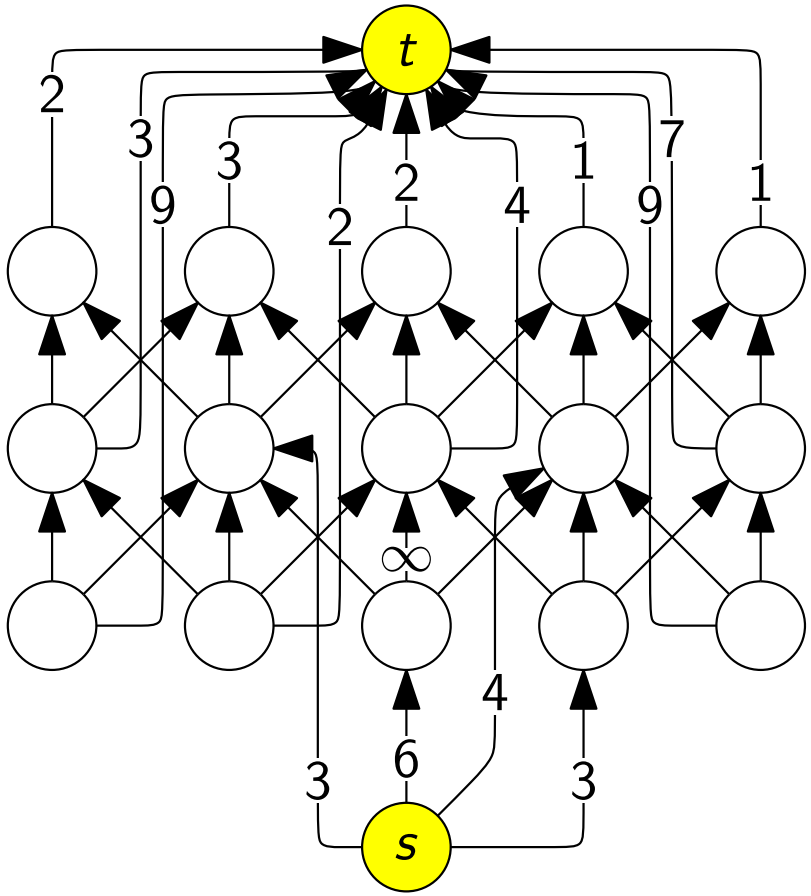
t を終点とする辺の容量はその始点を取ったときの損

露天掘り問題：最小カット問題としての定式化 (5)



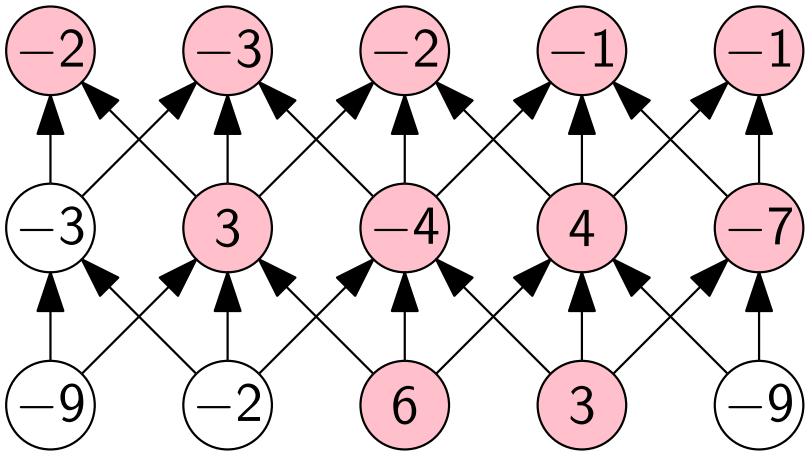
s を始点とする辺の容量はその終点を取らなかったときの損

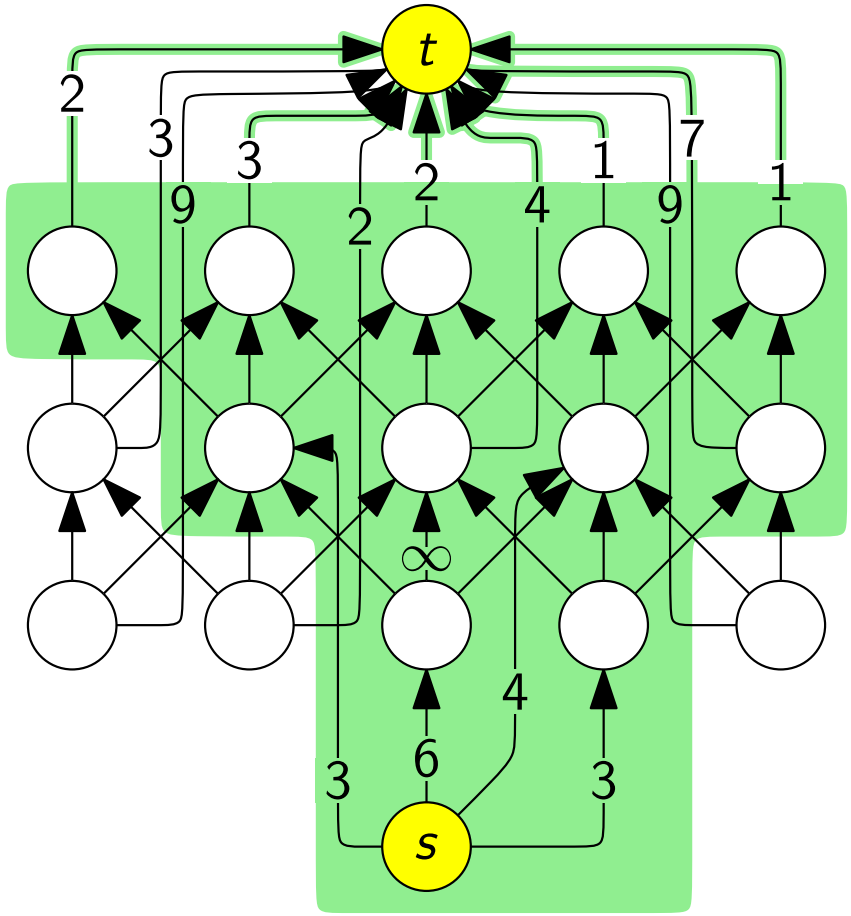
露天掘り問題：最小カット問題としての定式化 (6)



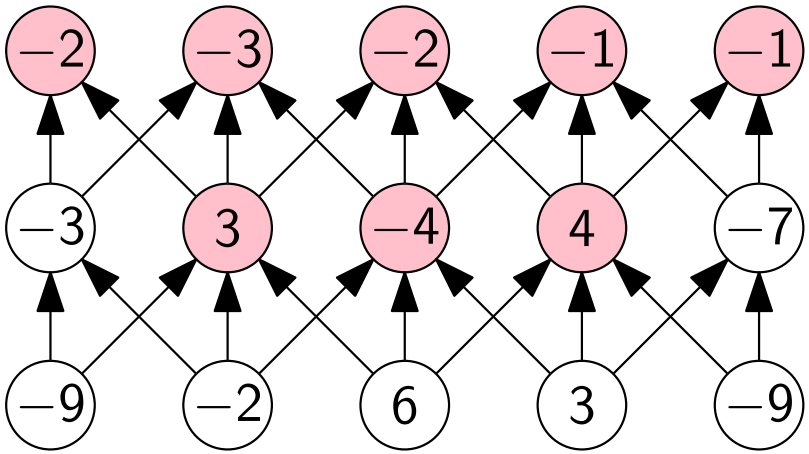
他の辺の容量は ∞ (無限大)

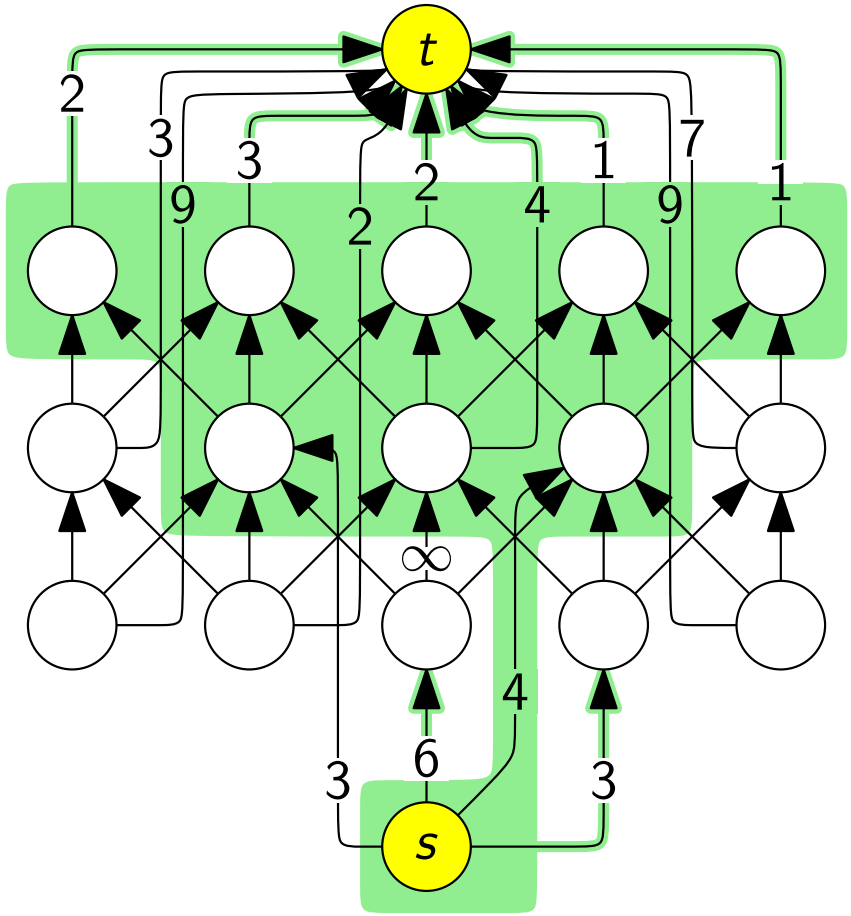
露天掘り問題：掘り方とカットの対応 (1)



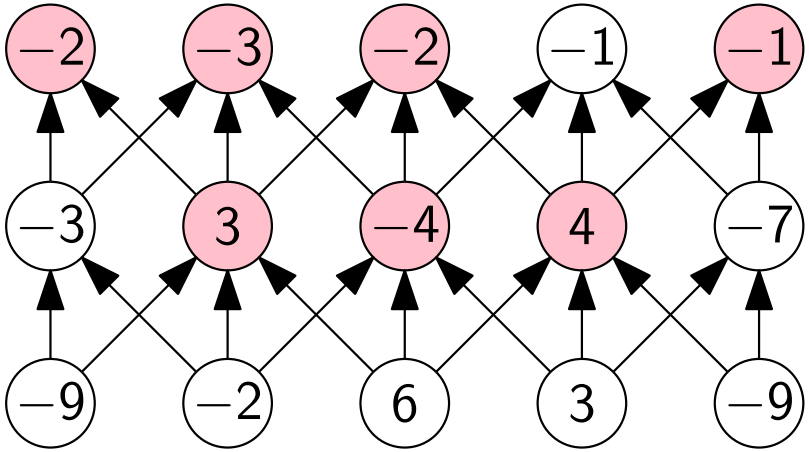


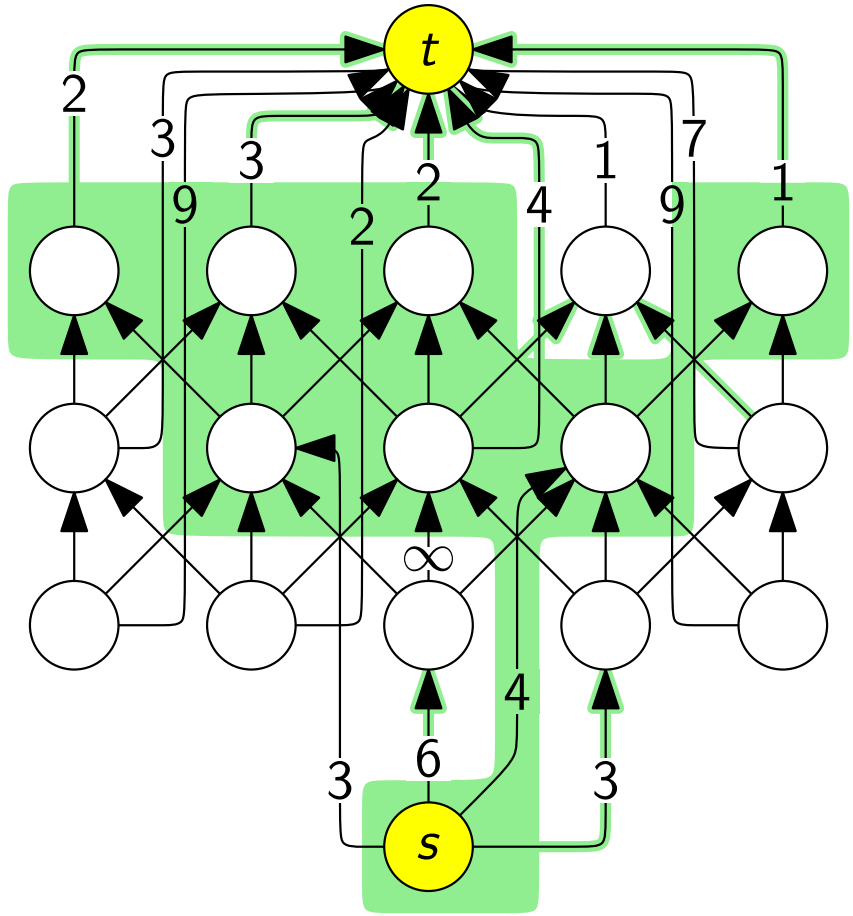
露天掘り問題：掘り方とカットの対応 (2)





露天掘り問題：掘り方とカットの対応 (3)



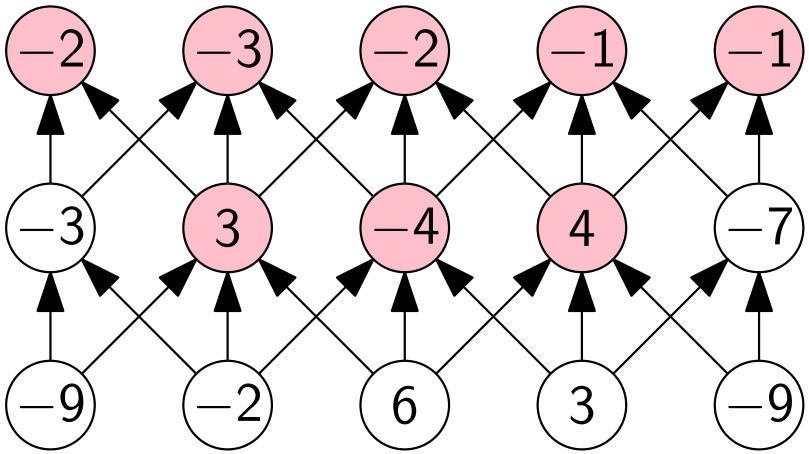


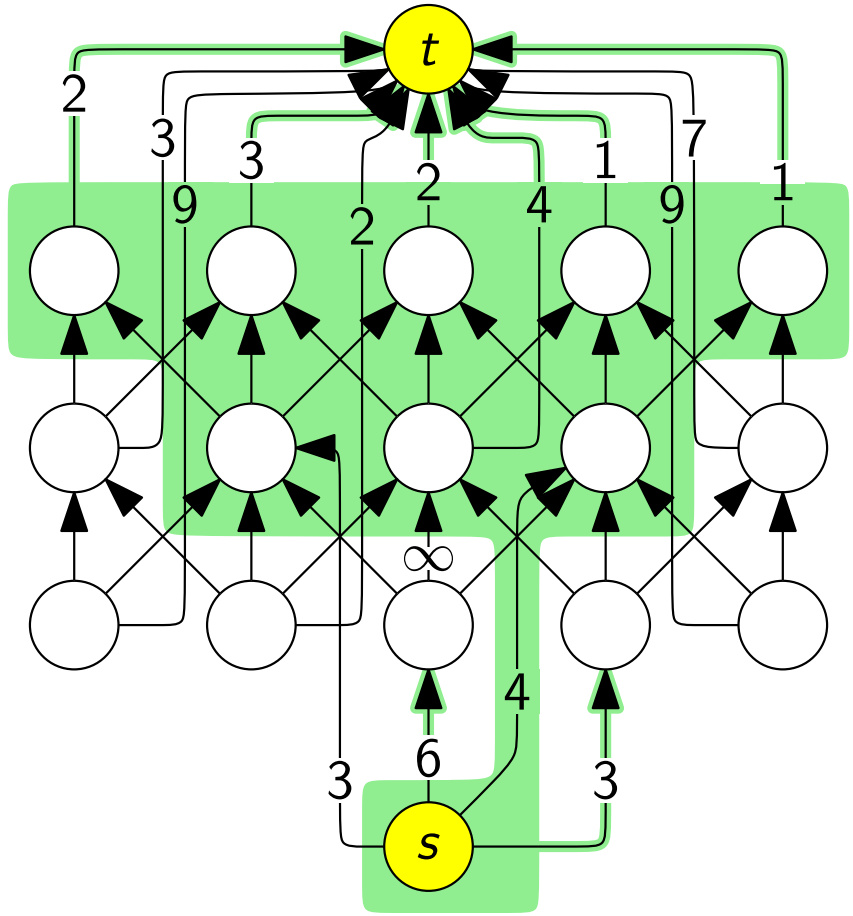
許されない掘り方に対応するカットの容量は無限大

露天掘り問題：ここまでのまとめ

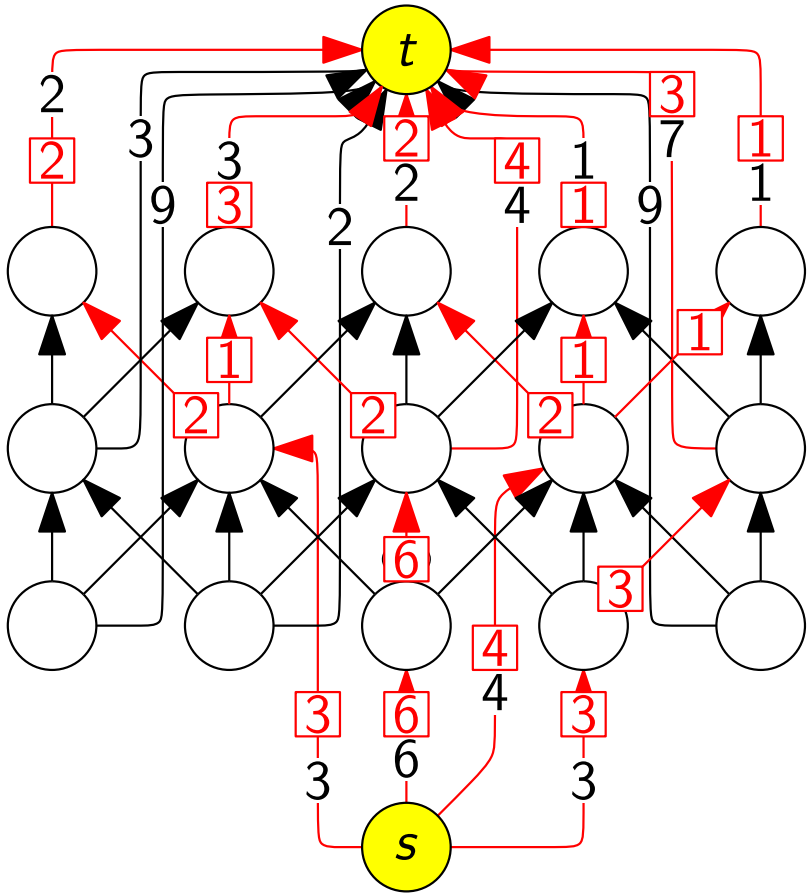
最小カットから，損が最も小さい掘り方が分かる **(Picard '76)**

最小カットを計算するために，最大流を計算する



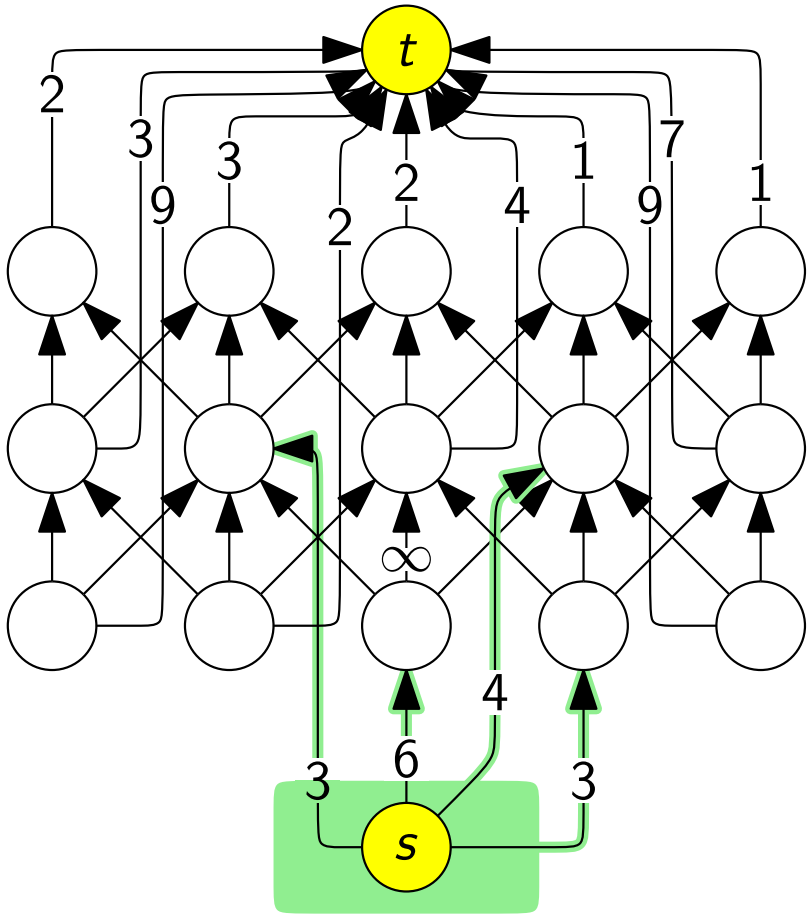


露天掘り問題：最大流



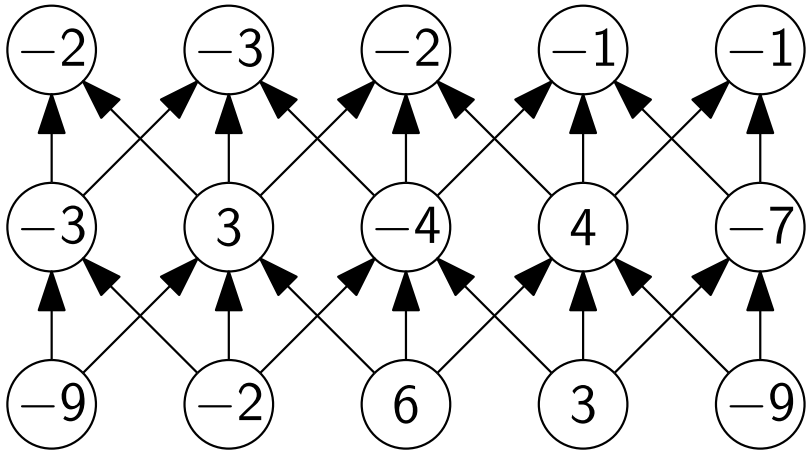
計算された最大流 (流量 $= 16$)

露天掘り問題：最小カット



対応する最小カット (容量 $= 16$)

露天掘り問題：最小カットに対応する掘り方



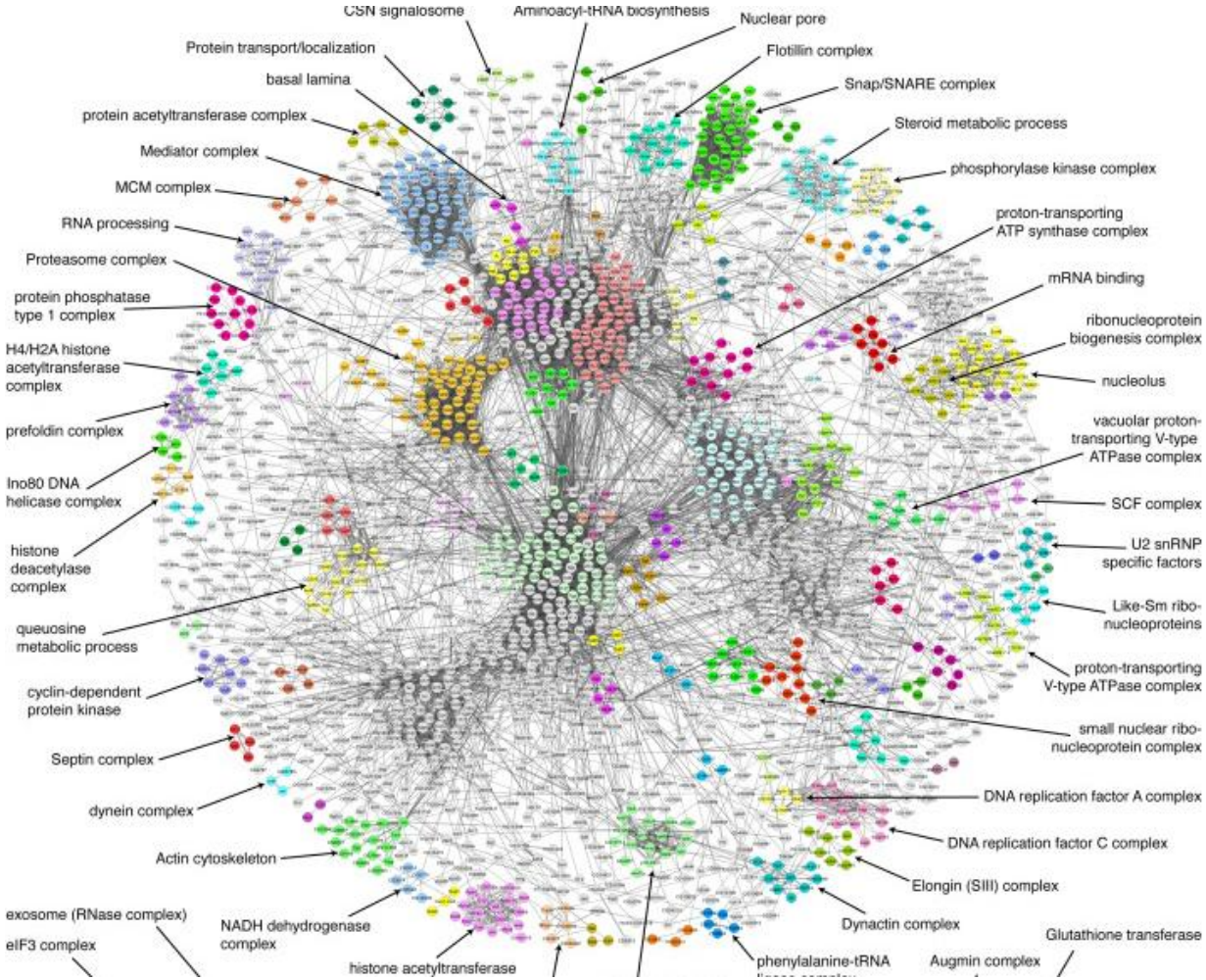
総利益 $= 0$

目次

1. リーグ戦における優勝可能性判定問題
2. 露天掘り問題
3. 今日のまとめと今後の予告

蛋白質相互作用ネットワーク

密な部分グラフ $\rightsquigarrow$ クラスタ (という意味のある構造) $\rightsquigarrow$ 知識発見

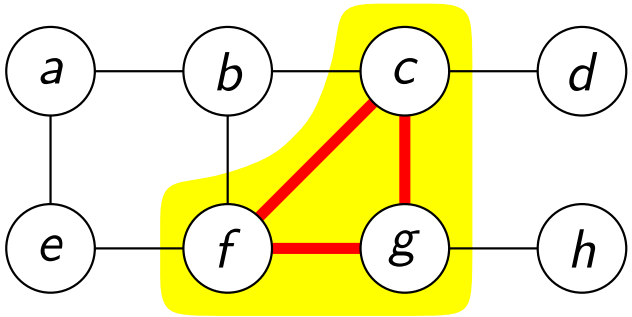


Guruharsha, et al., Cell 147 (2011) pp. 690–703

部分グラフの密度

部分グラフの密度とは？

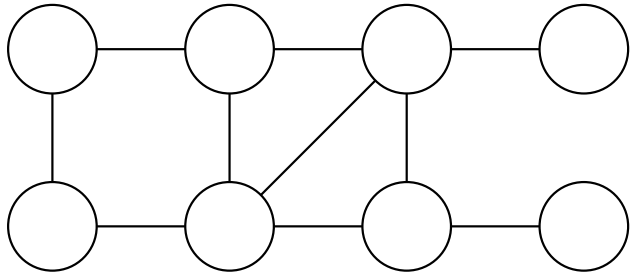
$$\frac{\text{辺の数}}{\text{頂点の数}}$$



$$\text{密度} = \frac{3}{3} = 1$$

最密部分グラフ問題

このグラフの部分グラフで，密度 1.2 以上のものを見つけたい



頂点数 $n = 8$，辺数 $m = 10$，密度保証 $= 1.2$

これについては説明しませんが...

この問題も最小カット問題に帰着できる

目次

1 リーグ戦における優勝可能性判定問題

2 露天掘り問題

3 今日のまとめと今後の予告

今日のまとめと今後の予告

今日の目標

- 最大流問題を使って，次の問題を解く
  - リーグ戦における優勝可能性判定問題
  - 露天掘り問題

[復習] 2 つの重要な定理：最大流最小カット定理，整数流定理

今後の予告：ネットワークに関わる 3 つの最適化問題

済 最短路問題

済 最大流問題

  済 最大流問題の応用
  - 注：最大流問題の応用は他にもたくさんある

- 最小費用流問題

注：ネットワークに関わる最適化問題は他にもたくさんある

目次

1. リーグ戦における優勝可能性判定問題
2. 露天掘り問題
3. 今日のまとめと今後の予告