最適化手法 第 10 回

ネットワーク最適化 (4)

— 最大流問題の応用 (1) —

後藤 順哉
中央大学 理工学部 経営システム工学科

2014 年 6 月 11 日

今日の概要

今日の目標

- 最大流問題を使って，次の問題を解く
  - 連結度計算問題
  - 割当問題 (の許容性判定版)

[復習] 2 つの重要な定理：最大流最小カット定理，整数流定理

ことわり

本講義で用いる資料は，電気通信大学 岡本吉央先生が 2013 年度前期「最適化手法」で用いた資料を，後藤が適宜変更して用いています．

目次

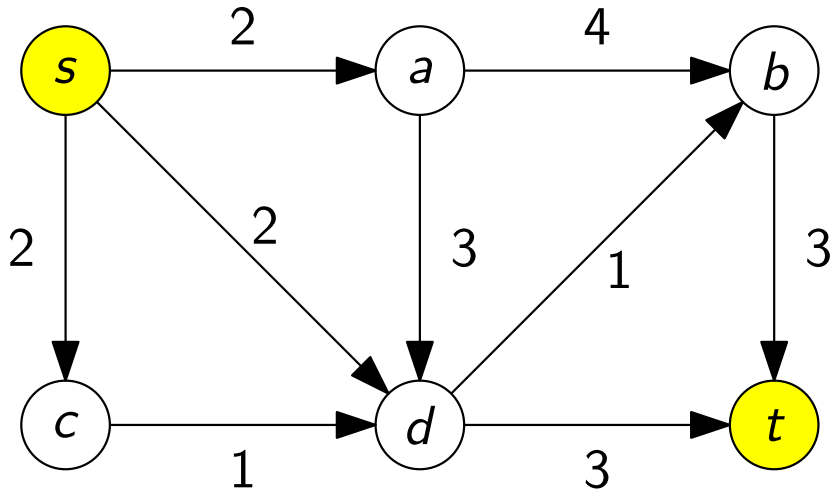
1. 辺連結度
2. 頂点連結度
3. 割当問題
4. 今日のまとめと今後の予告

最大流問題とは？ — 復習

最大流問題とは？

入力

- 有向グラフ $G = (V, E)$，各辺 $e \in E$ の容量，2 頂点 $s, t \in V$
  (辺の容量は非負実数)



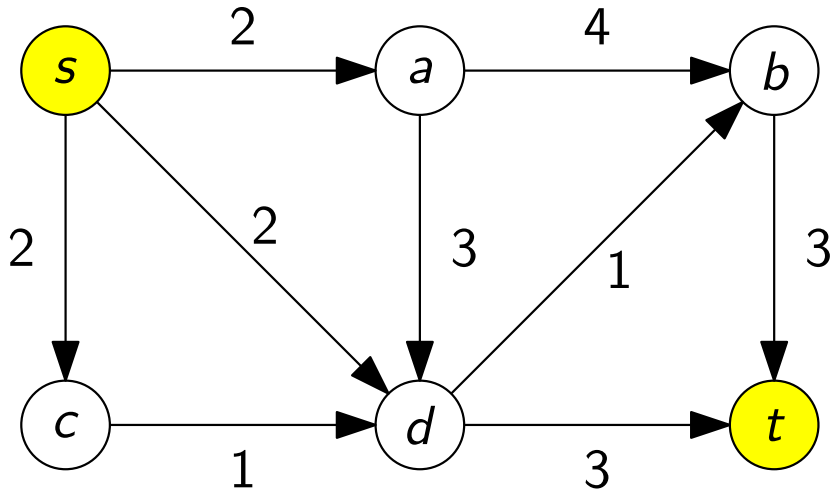
最大流問題とは？ — 復習

最大流問題とは？

出力

- s から t へ至る流れで，その流量が最大のもの

(s から t への最大流)



流れとは？ — 復習

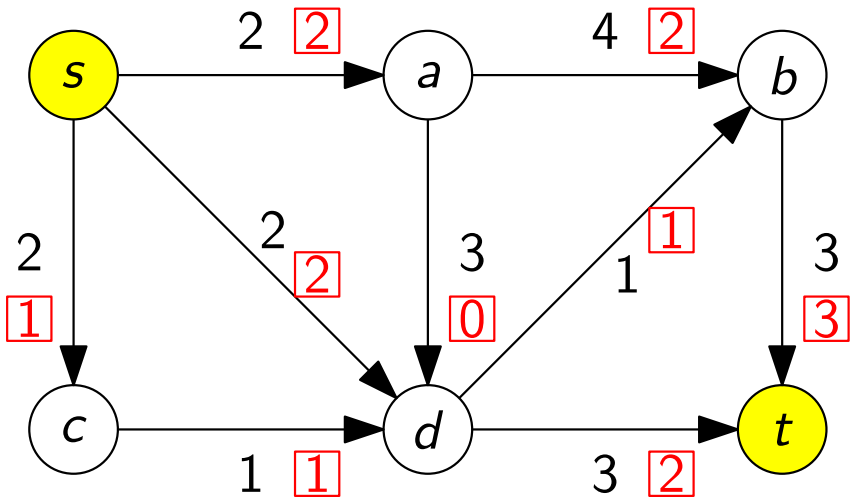
s から t への流れ (flow) とは？

- s から湧き出る総量 $=$ t へ流れ込む総量 (流れの流量とよぶ)
- s, t 以外の頂点 v において, (流量保存制約)

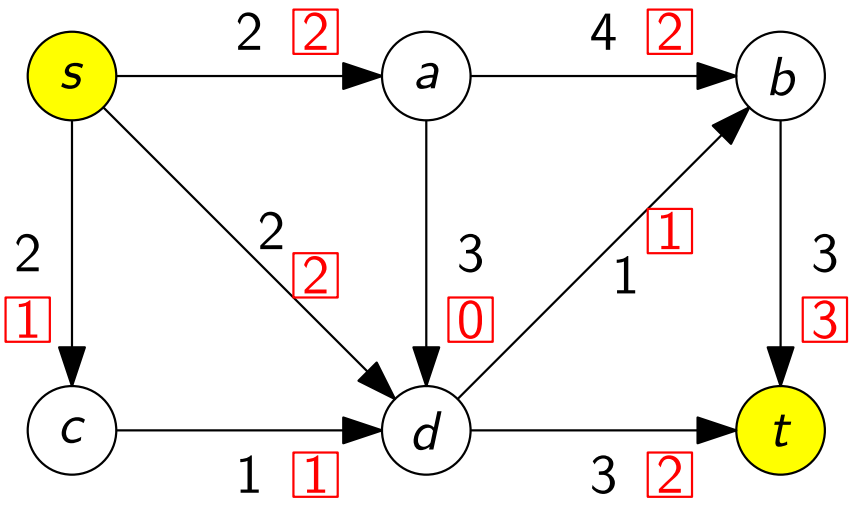
$$v \text{ から流れ出る総量} = v \text{ へ流れ入る総量}$$

- 各辺 e において, (容量制約)

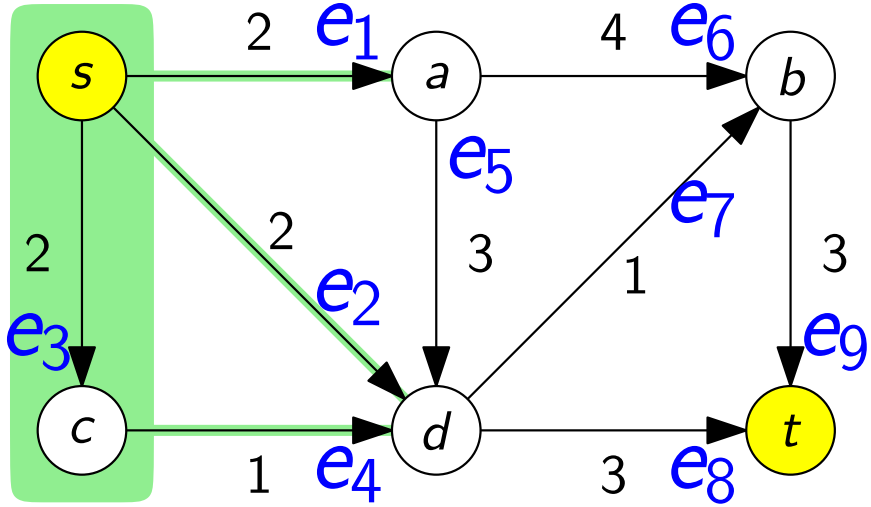
$$0 \leq e \text{ を流れる量} \leq e \text{ の容量}$$



最大流と最小カット — 復習



最大流量 ≥ 5



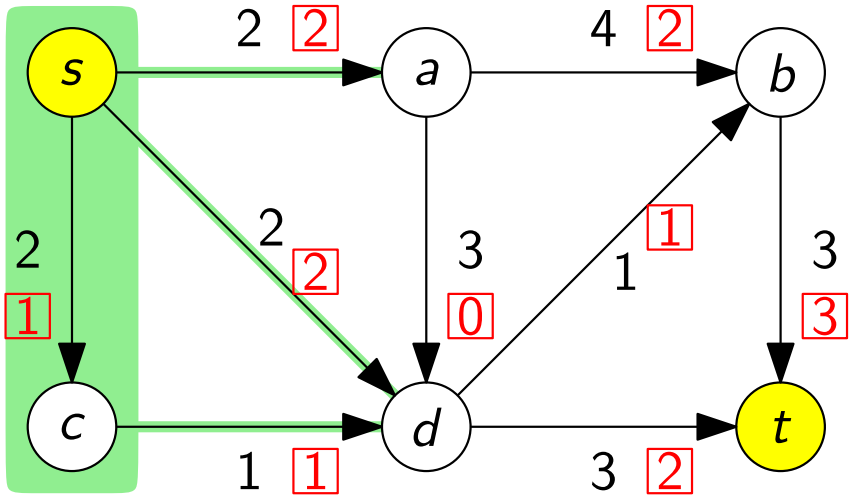
最大流量 ≤ 5

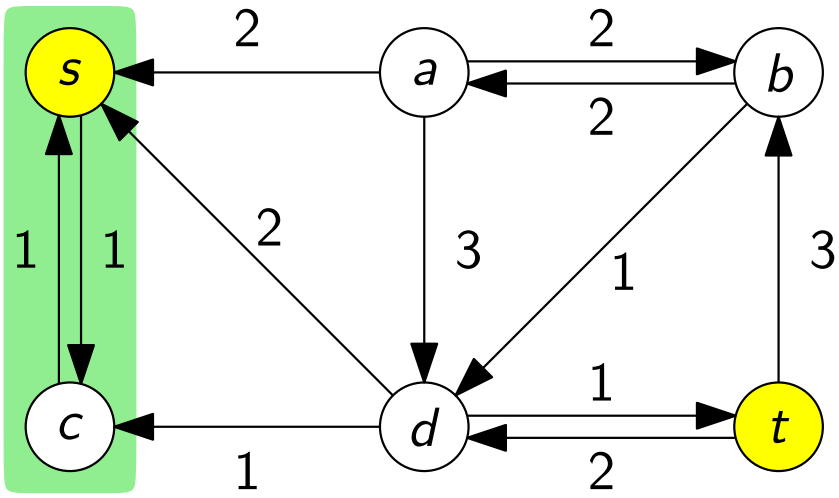
したがって

- 左の図にある流れは最大流であり，その流量は 5
- 右の図にあるカットは最小カットであり，その容量は 5

整数流定理 — 復習

増加道法で，流れを増加させるとき，その増加分は必ず整数だった





整数流定理

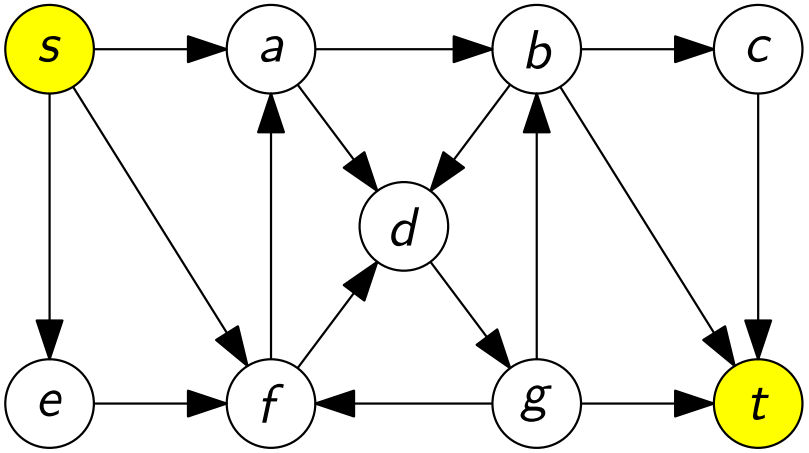
容量がすべて整数 ⇒ どの辺に流れる量も整数である最大流が存在

目次

1. 辺連結度
2. 頂点連結度
3. 割当問題
4. 今日のまとめと今後の予告

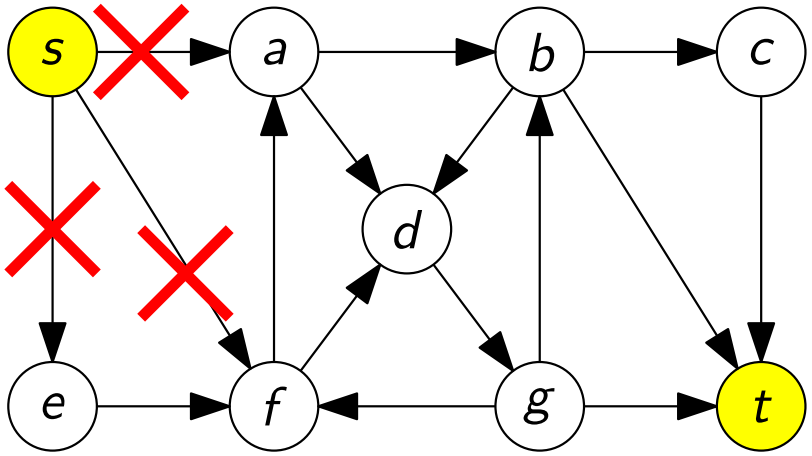
ネットワークの頑健性 (1)

悪者がネットワークの辺を壊そうとする



ネットワークの頑健性 (2)

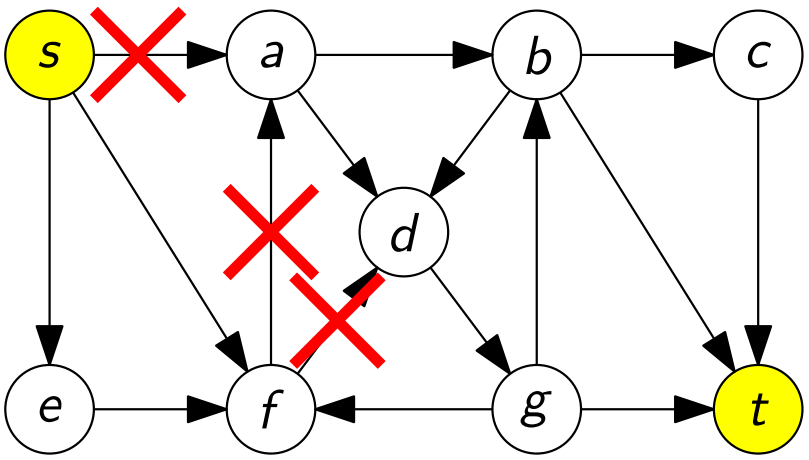
悪者がネットワークの辺を壊そうとする



この 3 辺が壊されると，s から t へ行けなくなる．

ネットワークの頑健性 (3)

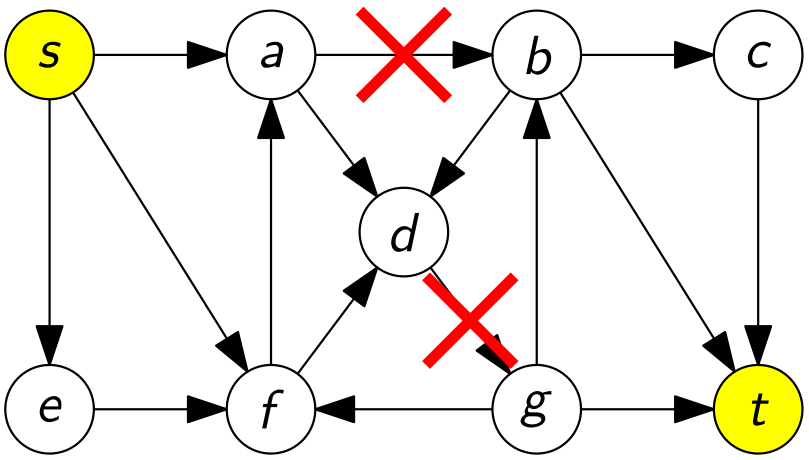
悪者がネットワークの辺を壊そうとする



この 3 辺が壊されると，s から t へ行けなくなる．

ネットワークの頑健性 (4)

悪者がネットワークの辺を壊そうとする



この 2 辺が壊されると，s から t へ行けなくなる．

疑問

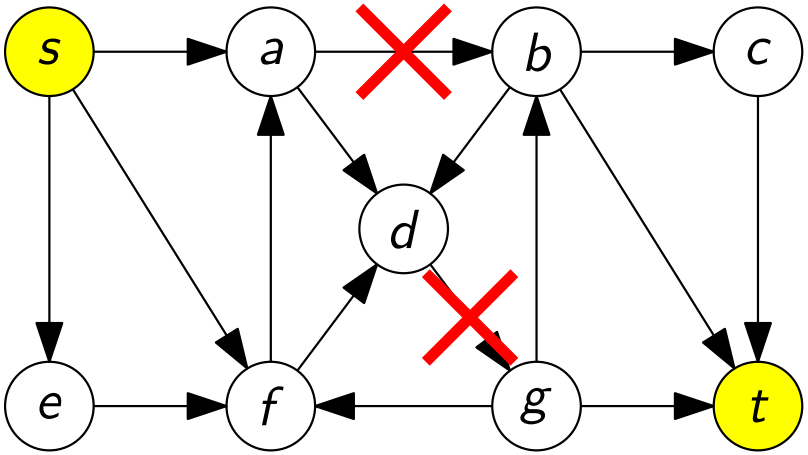
悪者は 1 辺を壊して，s から t へ行けなくさせられるか？

有向グラフの辺連結度

有向グラフ $G = (V, E)$，2 頂点 $s, t \in V$

G における s から t への辺連結度とは？

$$\min \left\{ k \;\middle|\; \begin{array}{l} G \text{ の辺を } k \text{ 個うまく壊すことで} \\ s \text{ を始点，} t \text{ を終点とする道がなくなる} \end{array} \right\}$$



このグラフにおいて，
s から t への辺連結度 ≤ 2

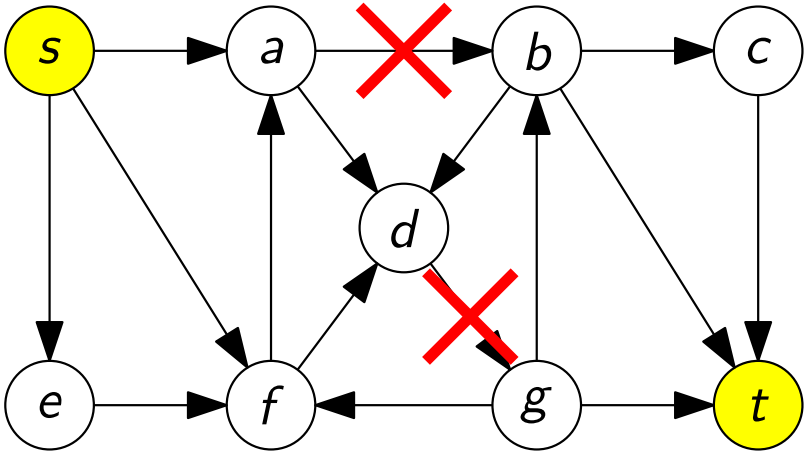
辺連結度と頑健性

辺連結度が大きい $\Leftrightarrow$ 悪者が s から t への経路を壊しにくい

ここからの目標

ここからの目標

辺連結度の計算を最大流問題として定式化する



最大流問題としての定式化：着眼点

観察

辺を壊すと s から t へ行けなくなる

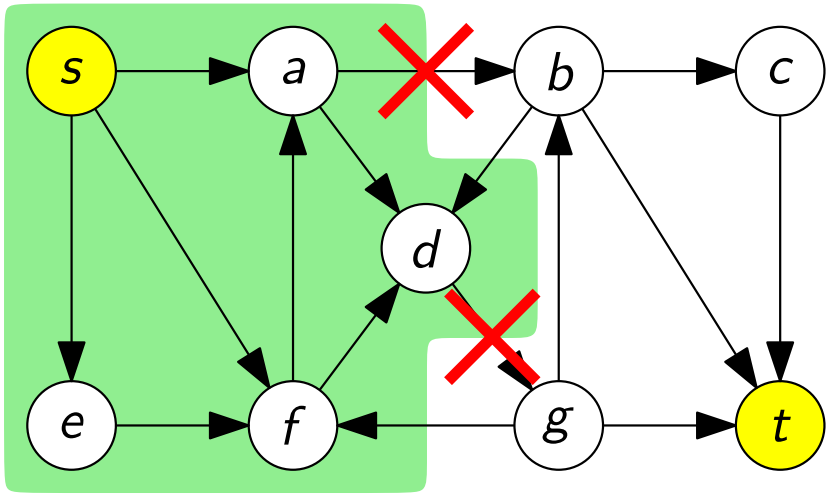
$\Rightarrow$ 辺を壊した後に，s からたどり着ける部分は G のカット

$\Rightarrow$ 壊した辺の数 $=$ そのカットから出る辺数

$\Rightarrow$ 全ての辺容量 $= 1$ ならば，カットから出る辺数 $=$ カットの容量

$\therefore$ 最小カットの容量から辺連結度が分かる

最小カットの容量 $=$ 最大流の流量 (最大流最小カットの定理)



最大流問題としての定式化：着眼点

観察

辺を壊すと s から t へ行けなくなる

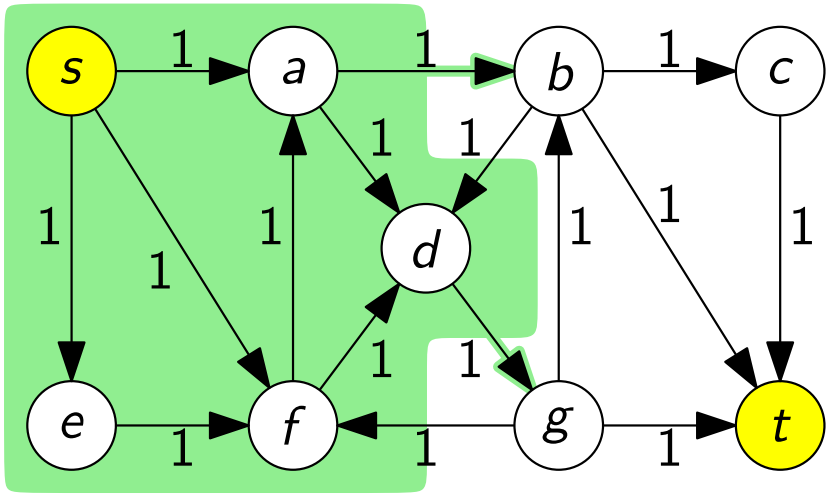
$\Rightarrow$ 辺を壊した後に，s からたどり着ける部分は G のカット

$\Rightarrow$ 壊した辺の数 $=$ そのカットから出る辺数

$\Rightarrow$ 全ての辺容量 $= 1$ ならば，カットから出る辺数 $=$ カットの容量

$\therefore$ 最小カットの容量から辺連結度が分かる

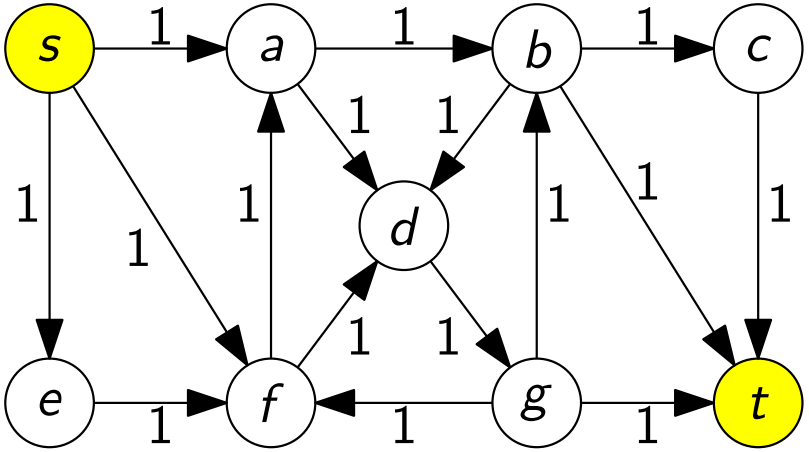
最小カットの容量 $=$ 最大流の流量　　(最大流最小カットの定理)



最大流問題としての定式化

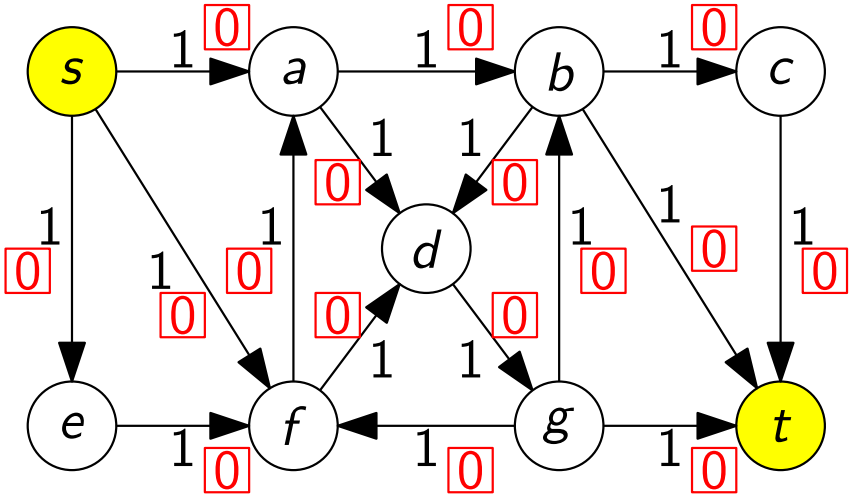
定式化

- グラフ：そのまま
- 容量：すべての辺の容量 $= 1$



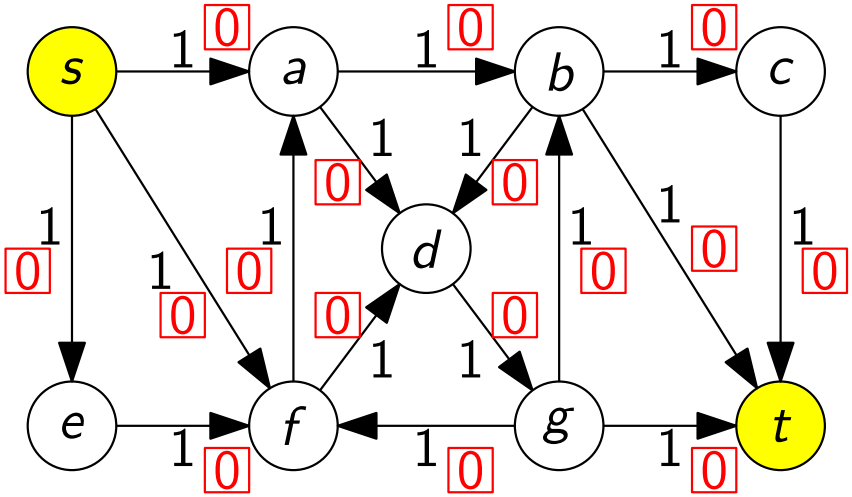
最大流問題：増加道法によって解いてみる (1)

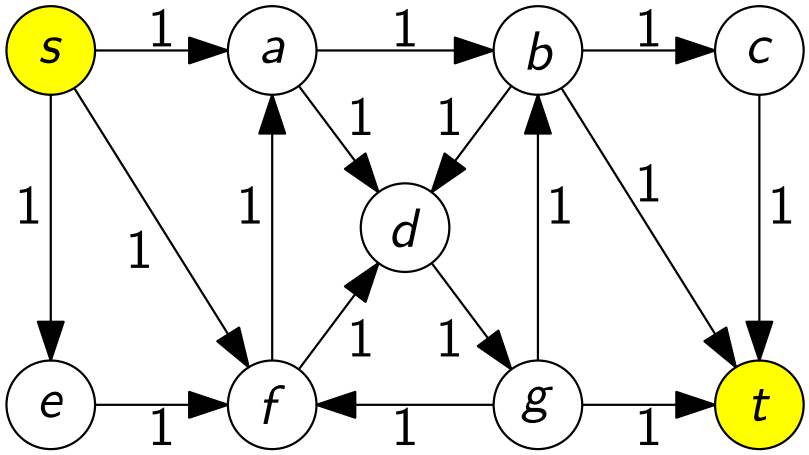
どの辺の上にも 0 だけ流れる状態からスタート



最大流問題：増加道法によって解いてみる (2)

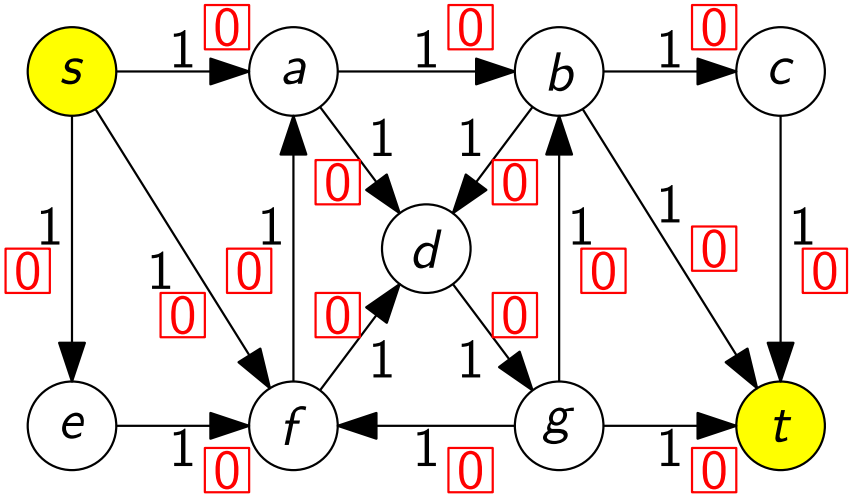
補助ネットワークを作る

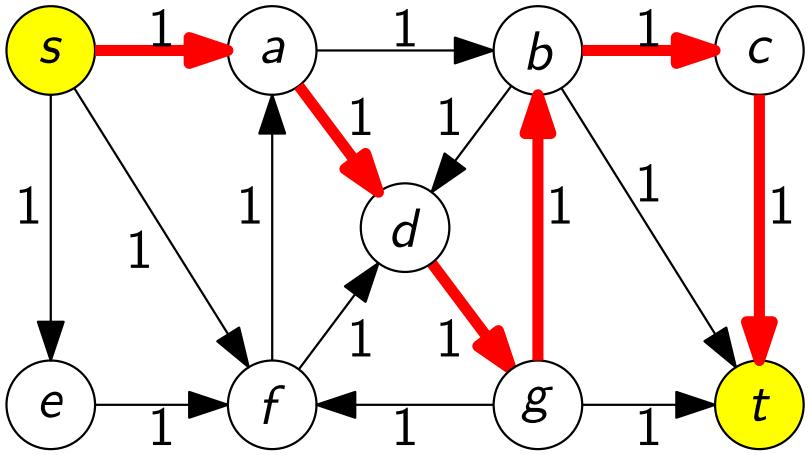




最大流問題：増加道法によって解いてみる (3)

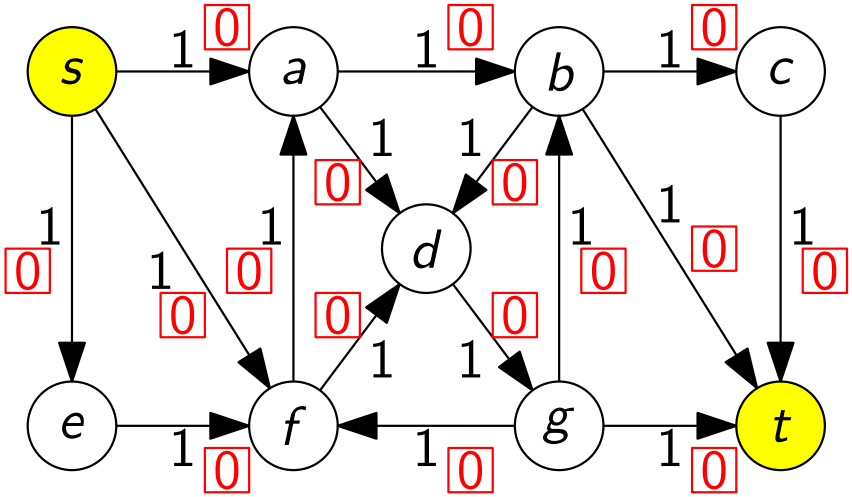
補助ネットワークにおいて増加道を発見する

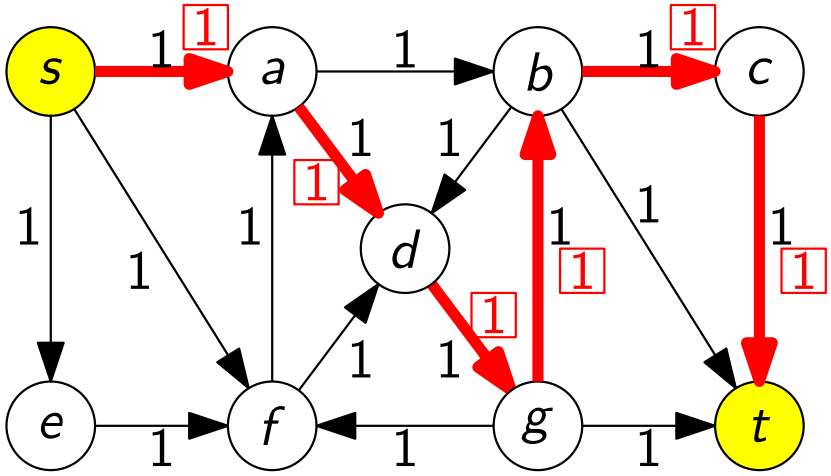




最大流問題：増加道法によって解いてみる (4)

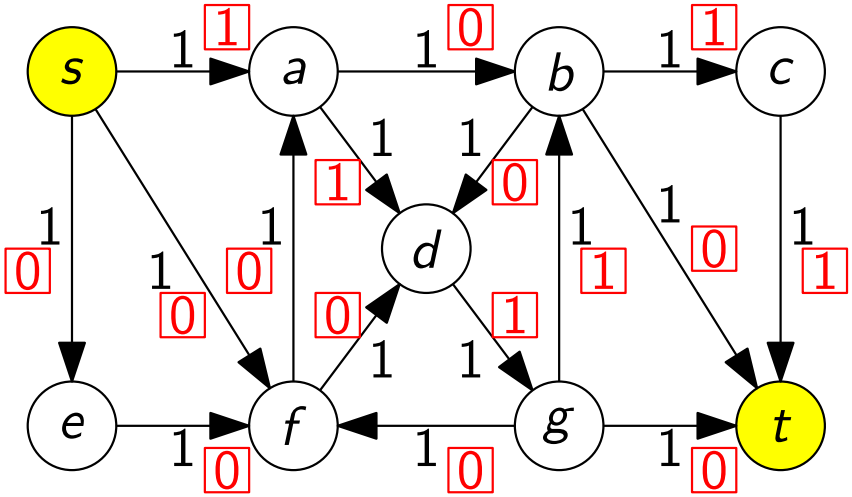
増加道に沿って，できるだけ流れを増加させる

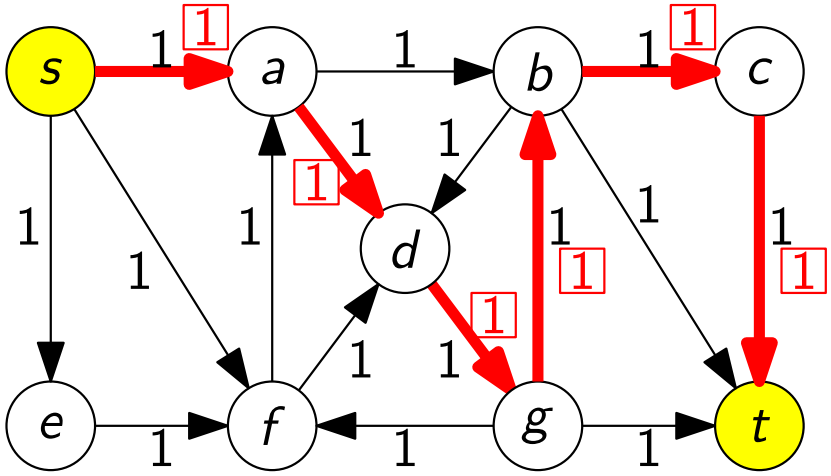




最大流問題：増加道法によって解いてみる (5)

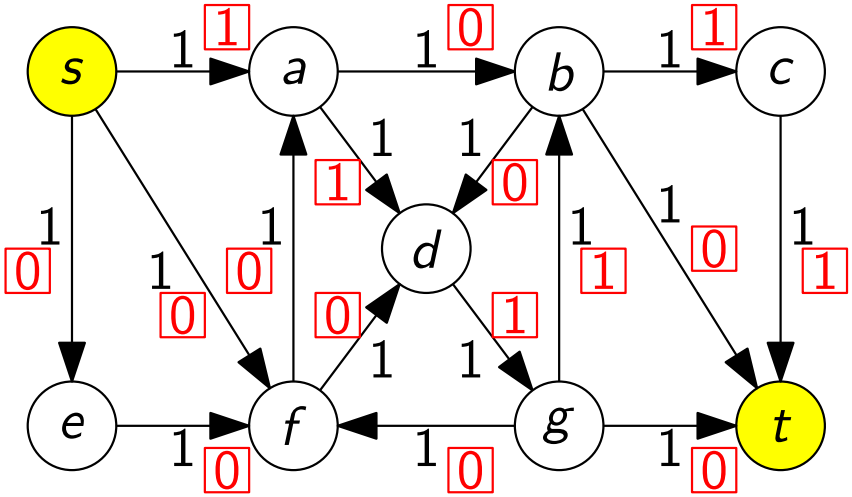
増加させた流れを得る

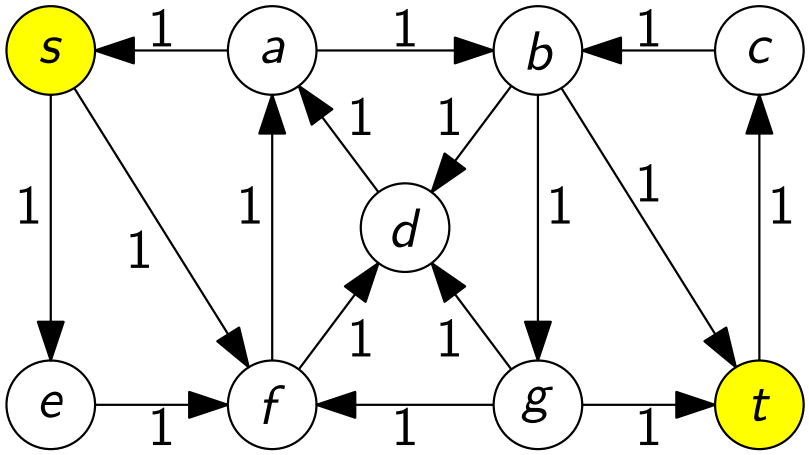




最大流問題：増加道法によって解いてみる (6)

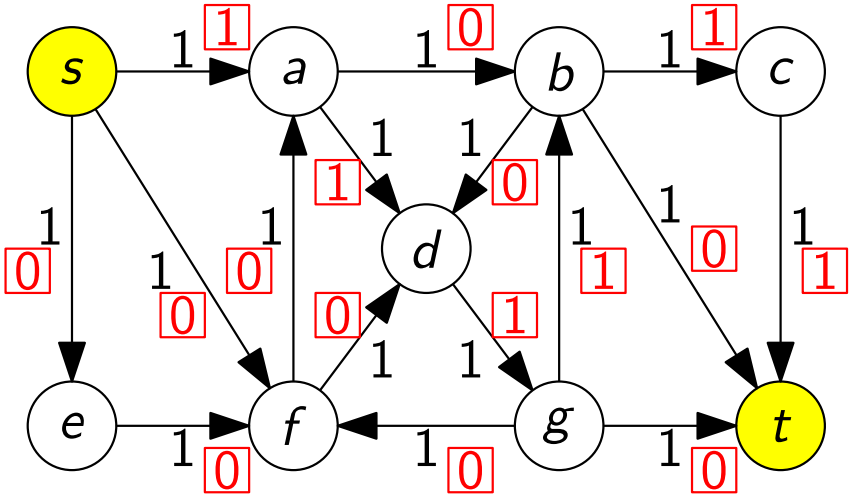
補助ネットワークを作る

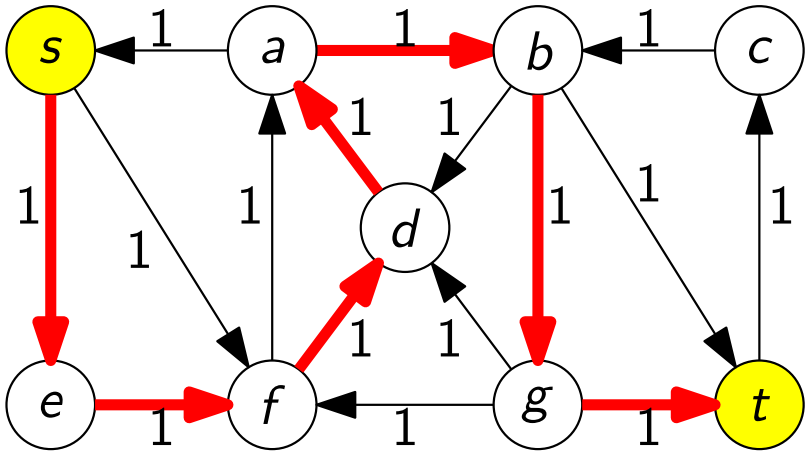




最大流問題：増加道法によって解いてみる (7)

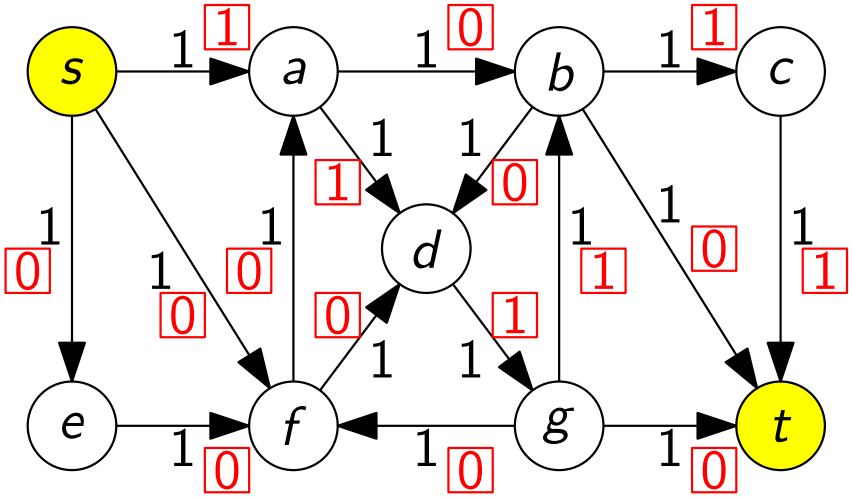
補助ネットワークにおいて増加道を発見する

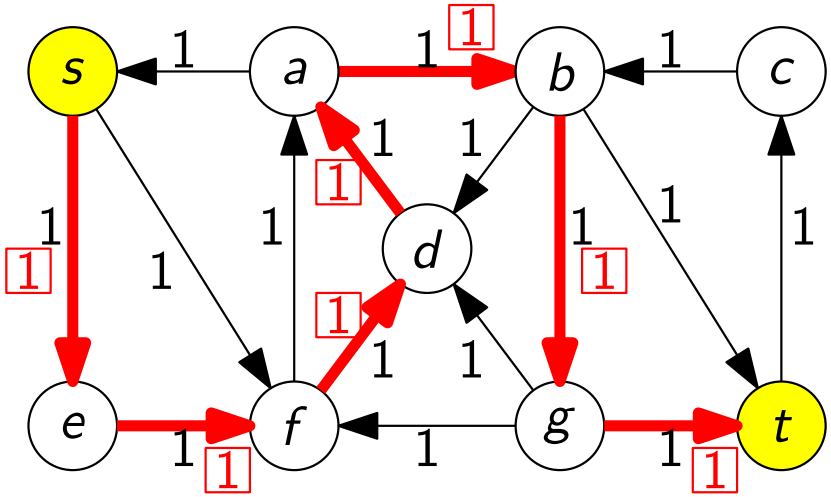




最大流問題：増加道法によって解いてみる (8)

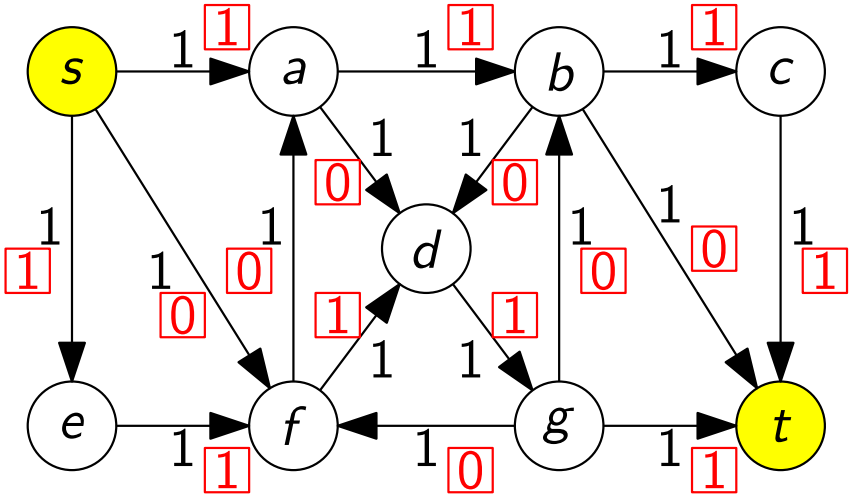
増加道に沿って，できるだけ流れを増加させる

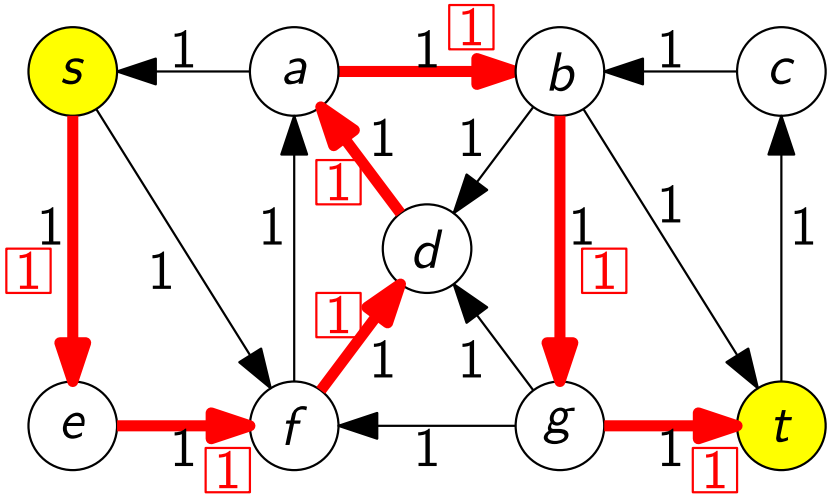




最大流問題：増加道法によって解いてみる (9)

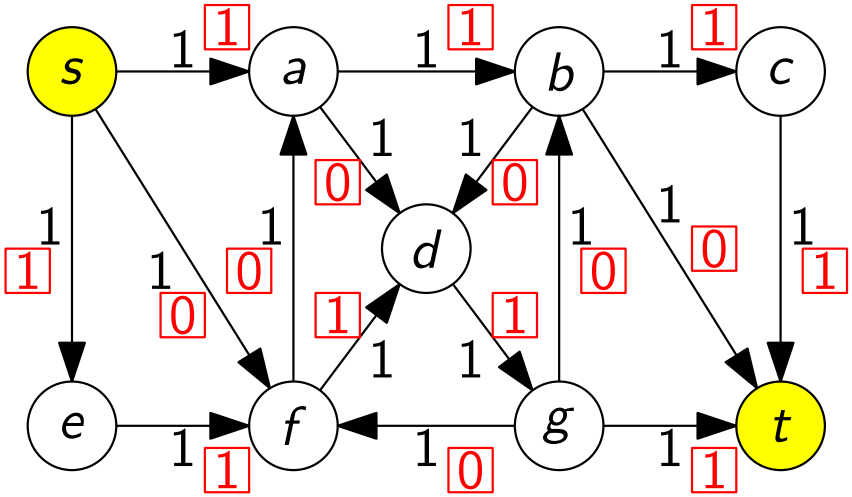
増加させた流れを得る

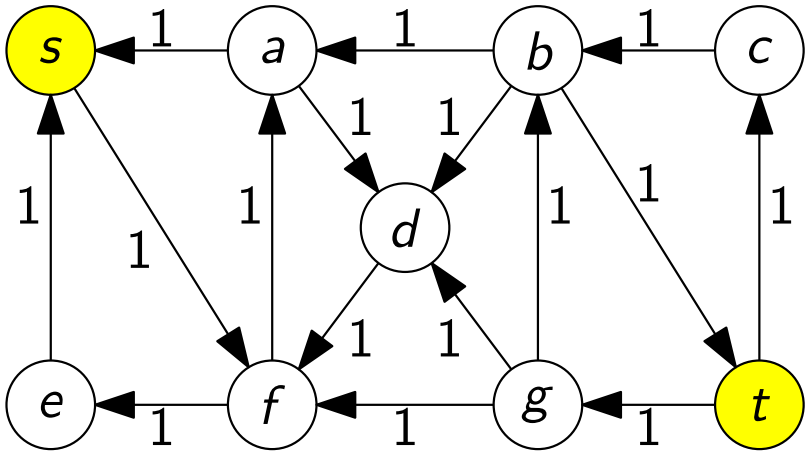




最大流問題：増加道法によって解いてみる (10)

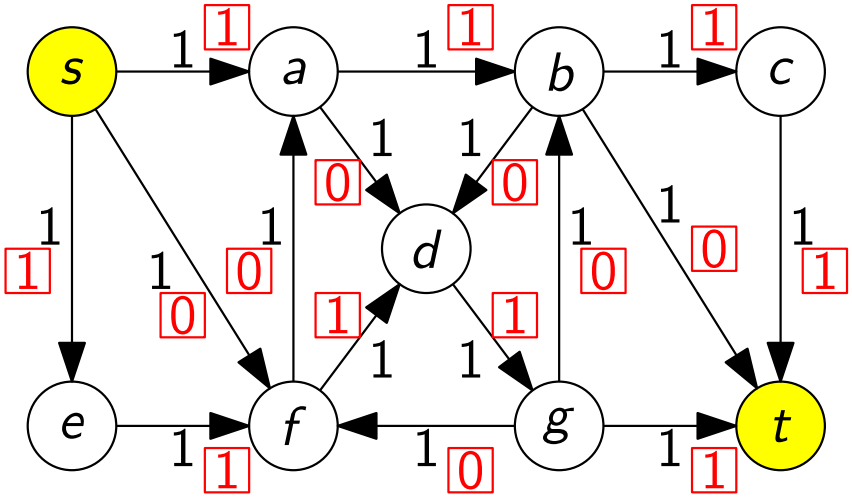
補助ネットワークを作る

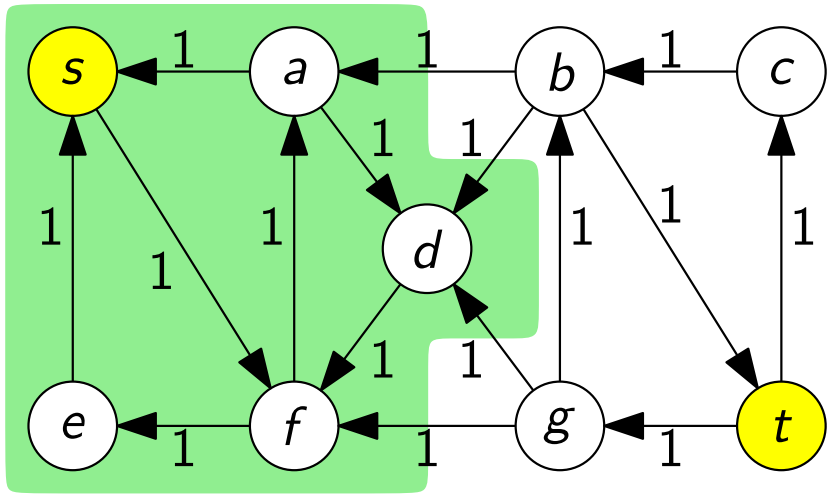




最大流問題：増加道法によって解いてみる (11)

補助ネットワークにおいて増加道を発見する



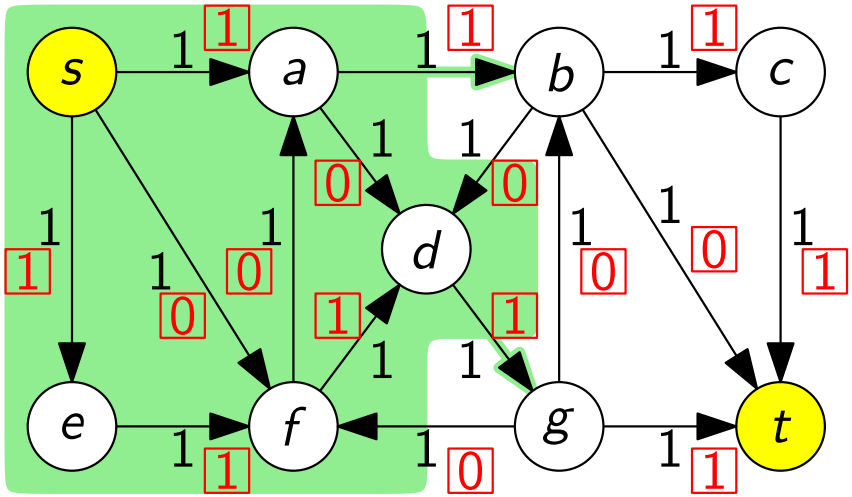


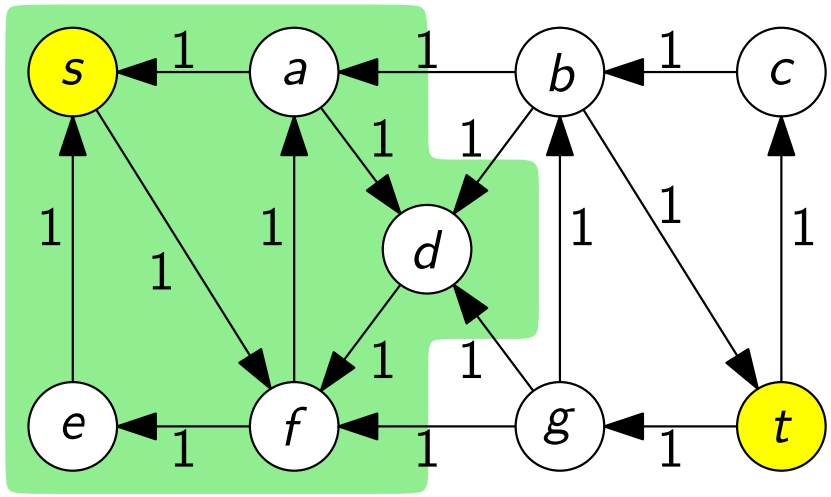
存在しない！ $\rightsquigarrow$ s からたどり着ける頂点を全部見つける (カット)

最大流問題：増加道法によって解いてみる (12)

そのカットの容量を元のグラフで見てみる

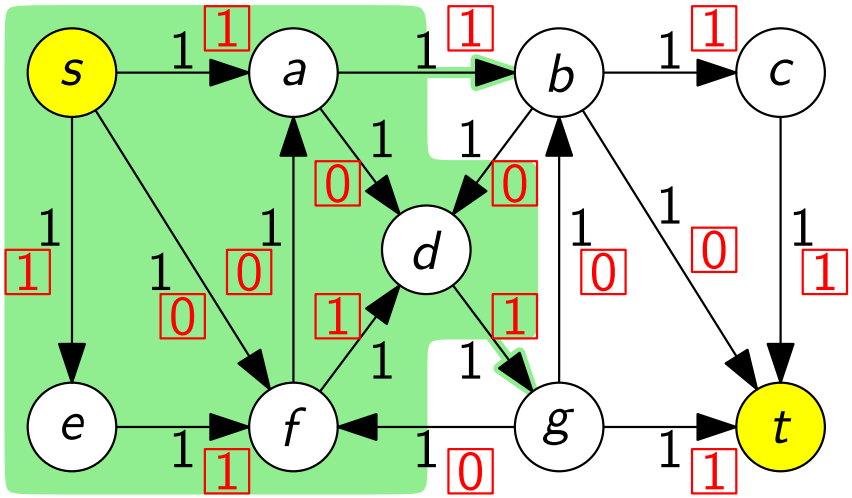
(流量と同じ値になっているはず)

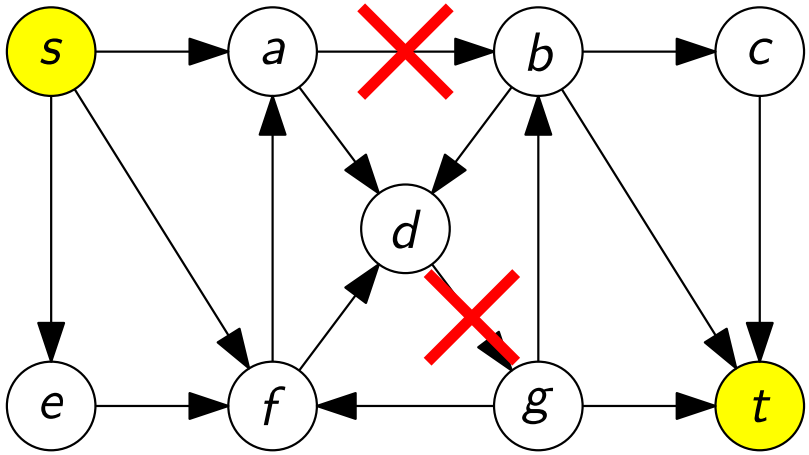




これで解けた！

解いた結果を再解釈 (1)

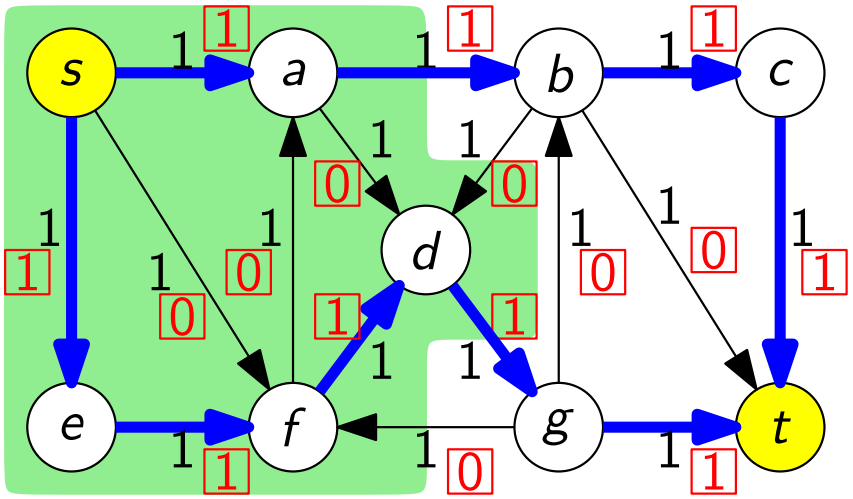




- カットから出る辺が辺連結度を与える
- 流れは何に対応するか？

整数性定理と容量の決め方から，各辺上を流れている量は 0 か 1

解いた結果を再解釈 (2)

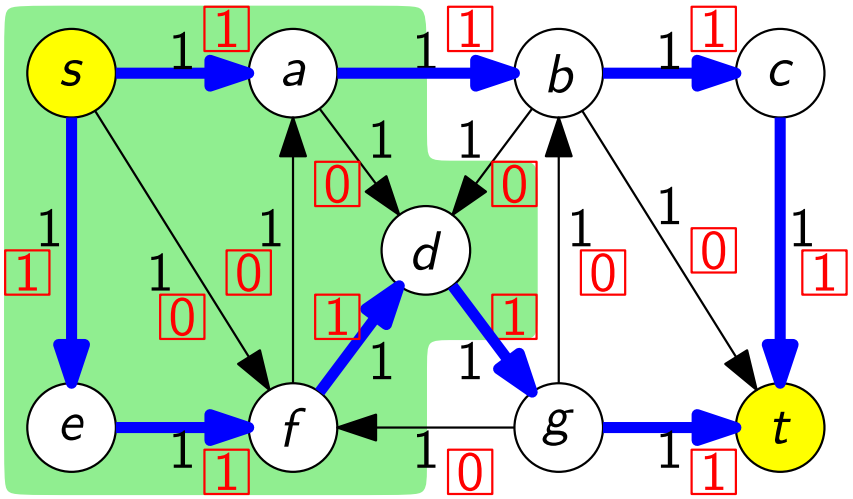


- 1 だけ流れている辺だけ見てみると，道が構成できる
- 道の数 = 最大流の流量 = 辺連結度
- ∴ 流れが道に対応している

「流れ」という比喩

流れ	——	道
たくさん流す	——	道を多く選ぶ

Menger の定理



Menger の定理

s を始点，t を終点とする道で辺を共有しないものの最大数 $=$ s から t への辺連結度

どんな有向グラフ，どんな s, t でも成り立つ

Karl Menger

Karl Menger
カール・メンガー
(1902–1985)

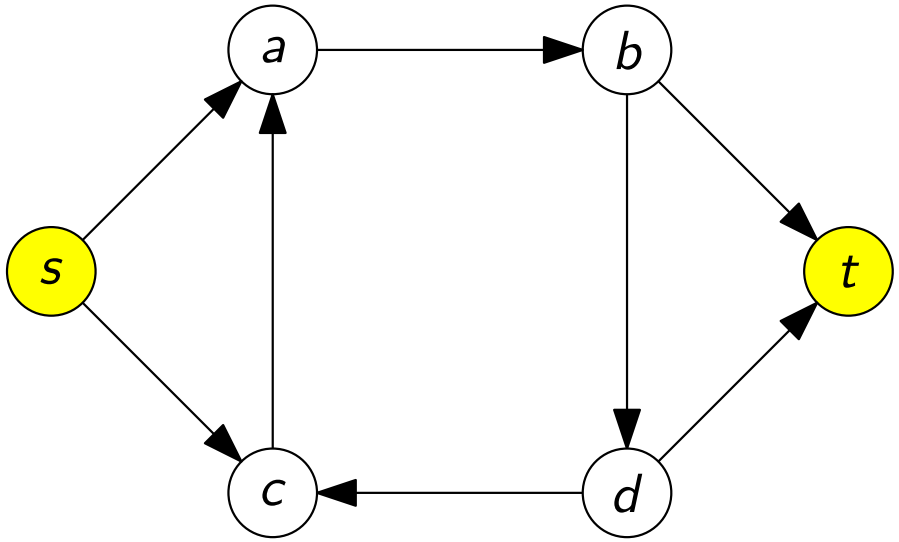
http://en.wikipedia.org/wiki/Karl_Menger

目次

1. 辺連結度
2. 頂点連結度
3. 割当問題
4. 今日のまとめと今後の予告

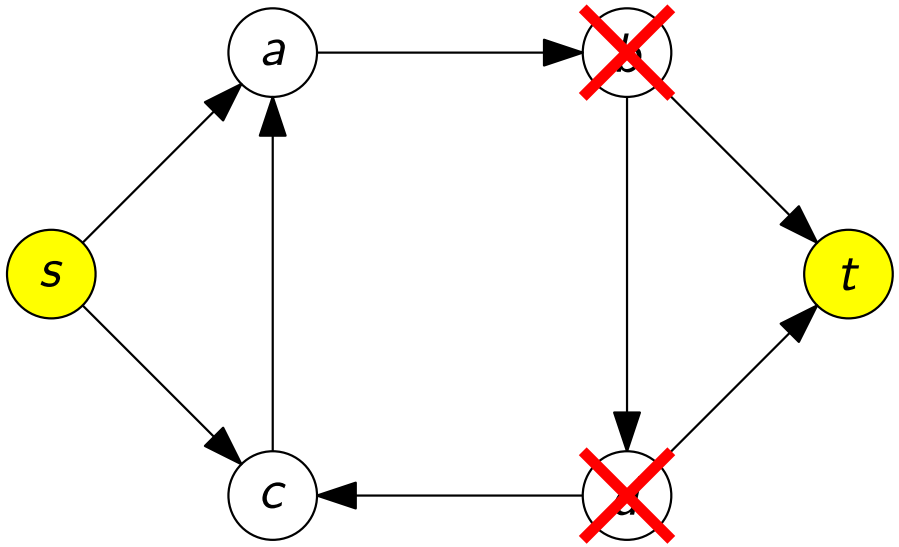
ネットワークの頑健性 — 頂点バージョン (1)

悪者がネットワークの頂点を壊そうとする



ネットワークの頑健性 — 頂点バージョン (2)

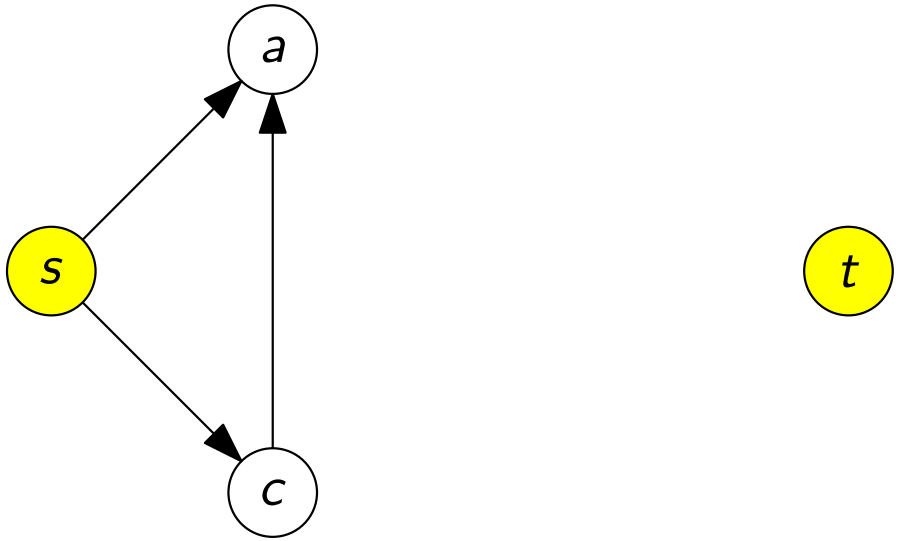
悪者がネットワークの頂点を壊そうとする



この 2 頂点が壊されると，s から t へ行けなくなる．

ネットワークの頑健性 — 頂点バージョン (2)

悪者がネットワークの頂点を壊そうとする



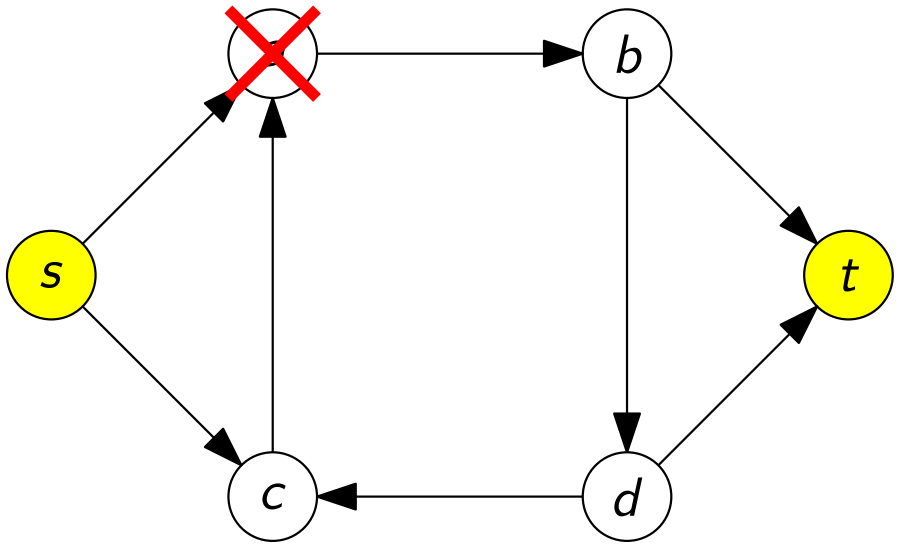
この 2 頂点が壊されると，s から t へ行けなくなる．

疑問

悪者は 1 頂点を壊して，s から t へ行けなくさせられるか？

ネットワークの頑健性 — 頂点バージョン (3)

悪者がネットワークの頂点を壊そうとする



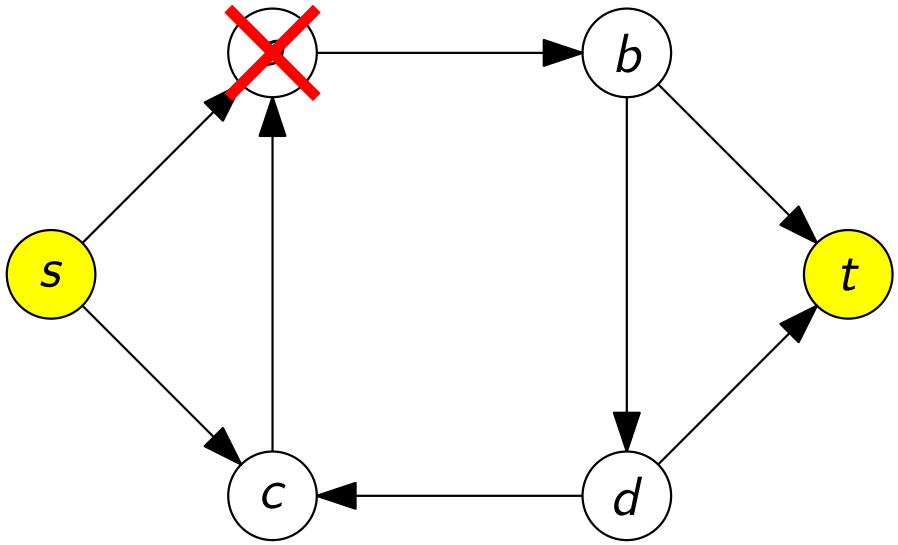
この 1 頂点が壊されると，s から t へ行けなくなる．

有向グラフの頂点連結度

有向グラフ $G = (V, E)$，2 頂点 $s, t \in V$

G における s から t への頂点連結度とは？

$$\min \left\{ k \;\middle|\; \begin{array}{l} G \text{ の } s, t \text{ 以外の頂点を } k \text{ 個うまく壊すことで} \\ s \text{ を始点，} t \text{ を終点とする道がなくなる} \end{array} \right\}$$

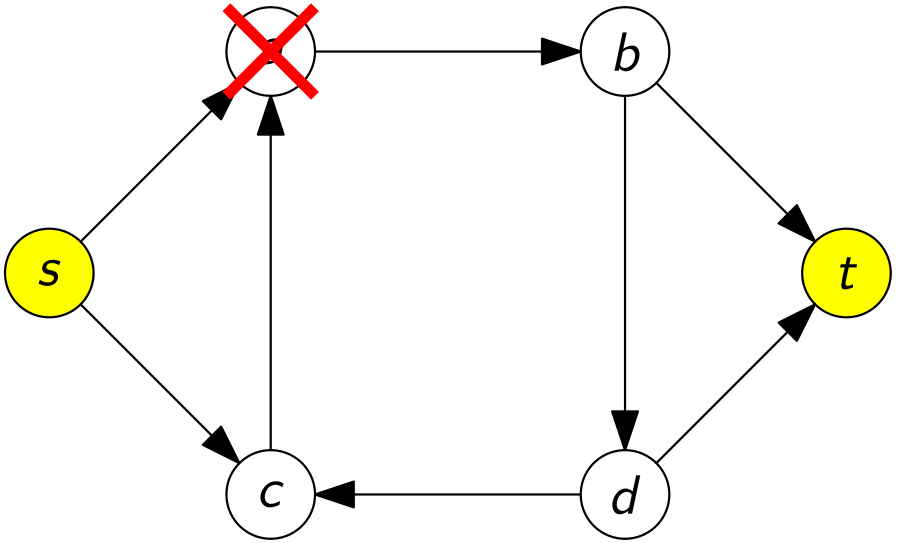


このグラフにおいて，
s から t への頂点連結度 ≤ 1

ここからの目標

ここからの目標

頂点連結度の計算を最大流問題として定式化する



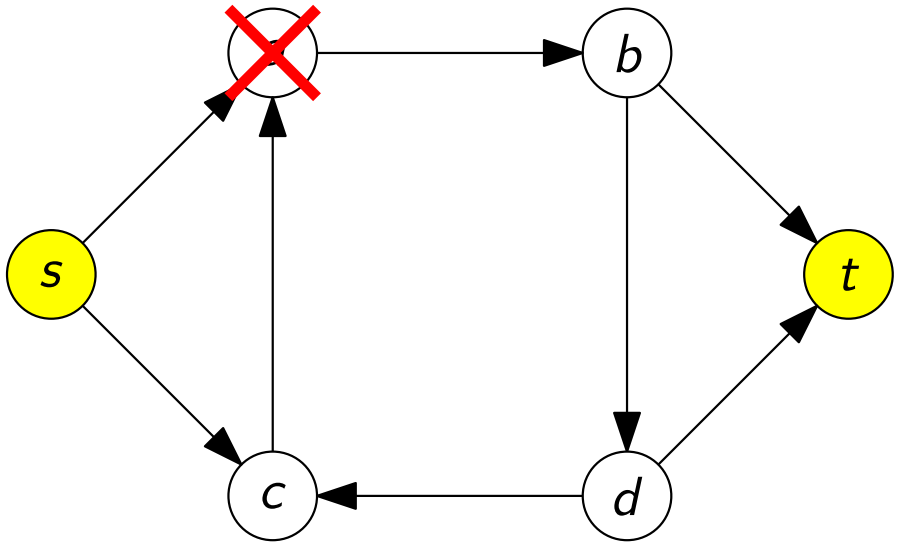
最大流問題としての定式化：着眼点

観察

辺連結度のときと同様に，カットを見てみたい

- しかし，カットを見るときに壊すのは辺

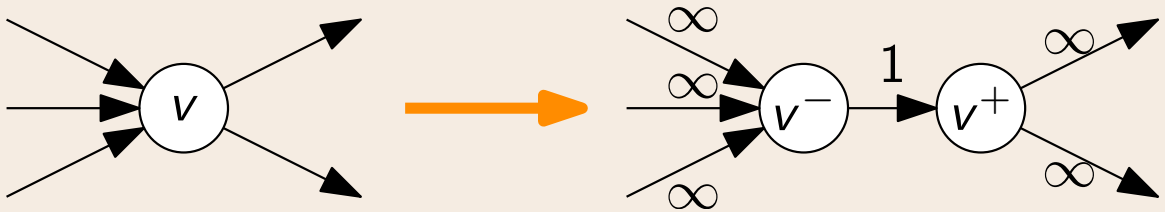
∴ 頂点の問題を辺の問題に変換するため，グラフに操作を施す

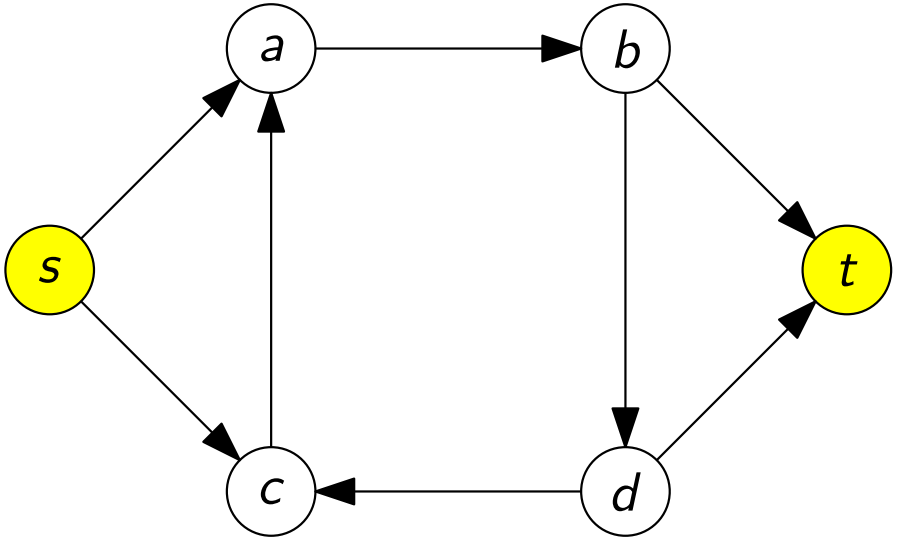


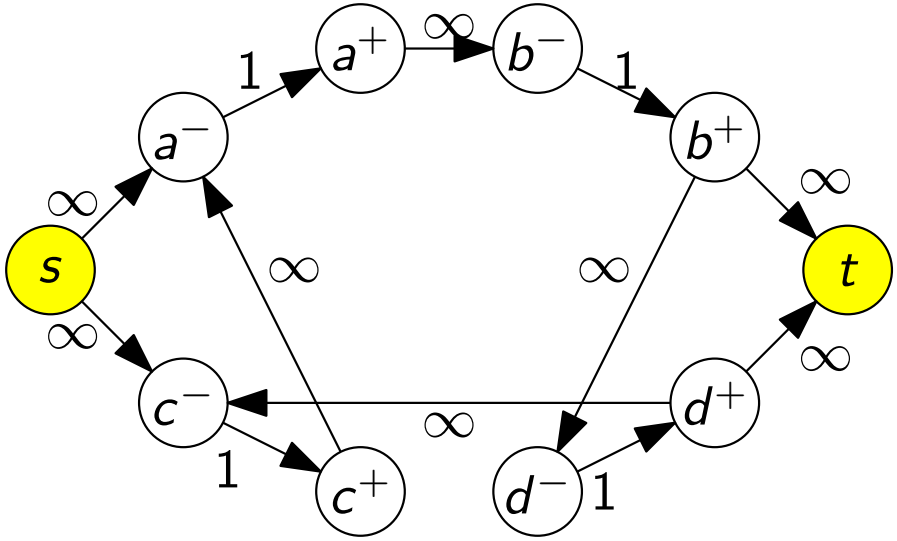
最大流問題としての定式化：操作

行う操作

各頂点に対して次の操作を行い，辺の容量も次のように定める

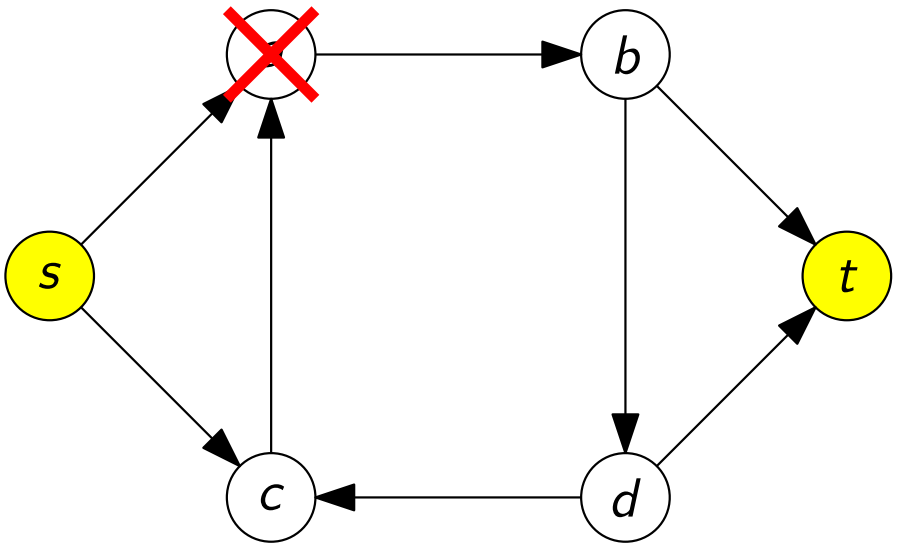


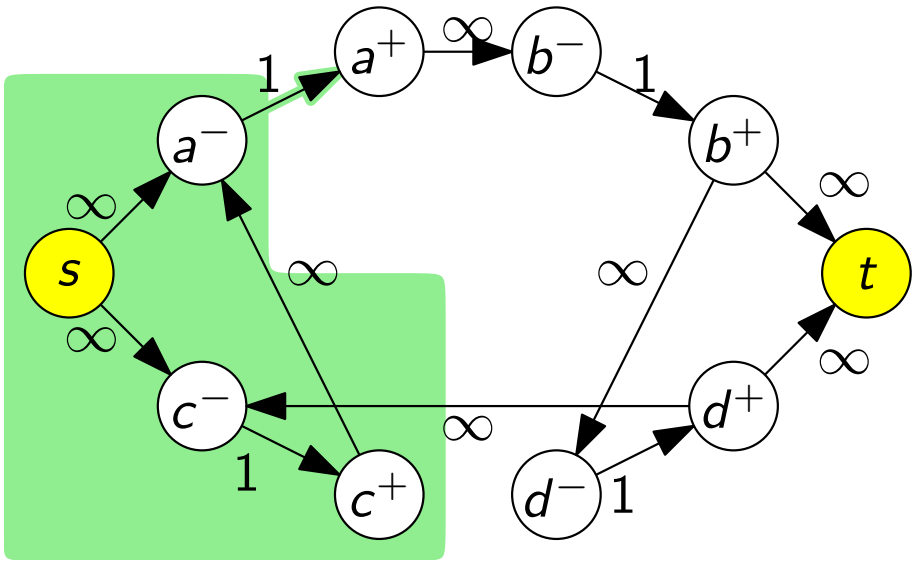




最大流問題としての定式化：操作に対する直感

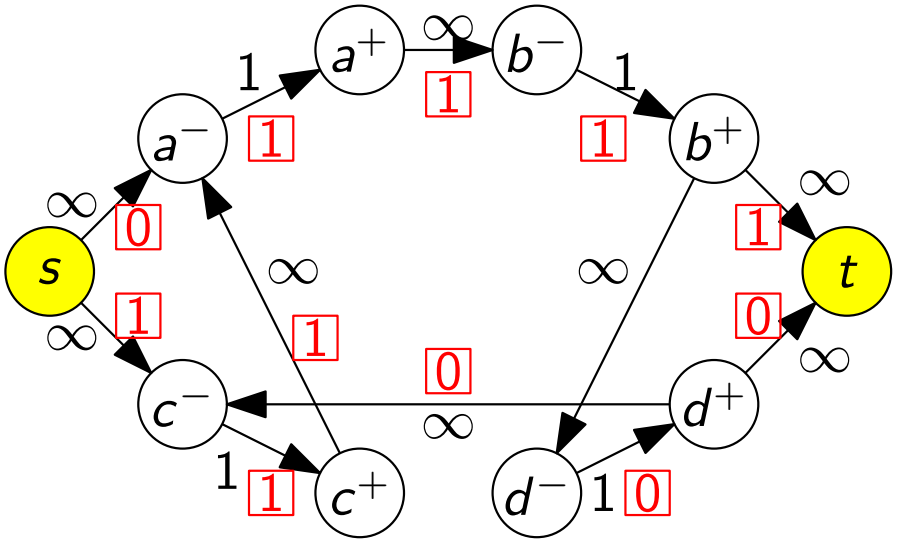
- 最小カットから容量 ∞ の辺が出ていけない
- $\therefore$ 最小カットから出る辺の容量はすべて 1
- そのような辺はもとのグラフにおける頂点に対応
- 対応する頂点を取り除けば，s から t に行けなくなる

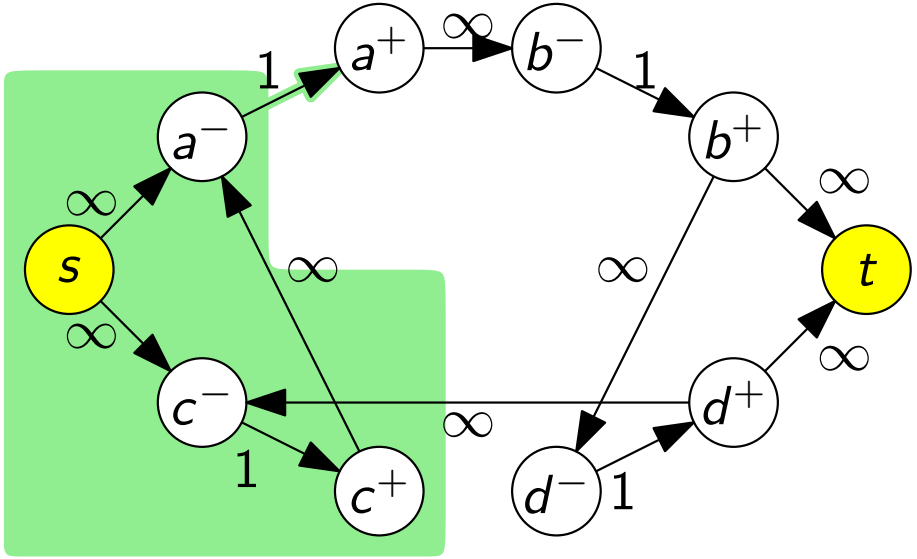




最大流と最小カット

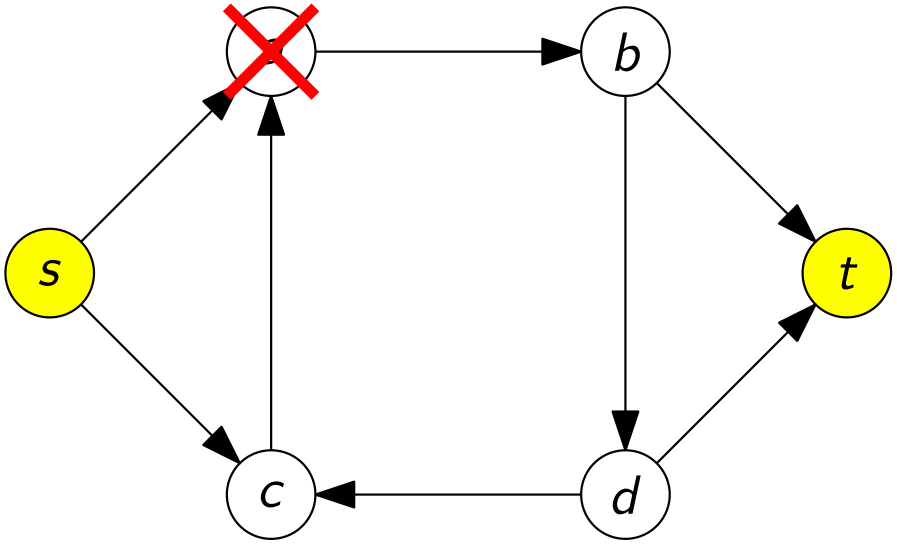
増加道法を適用すると，例えば，次の最大流と最小カットが得られる

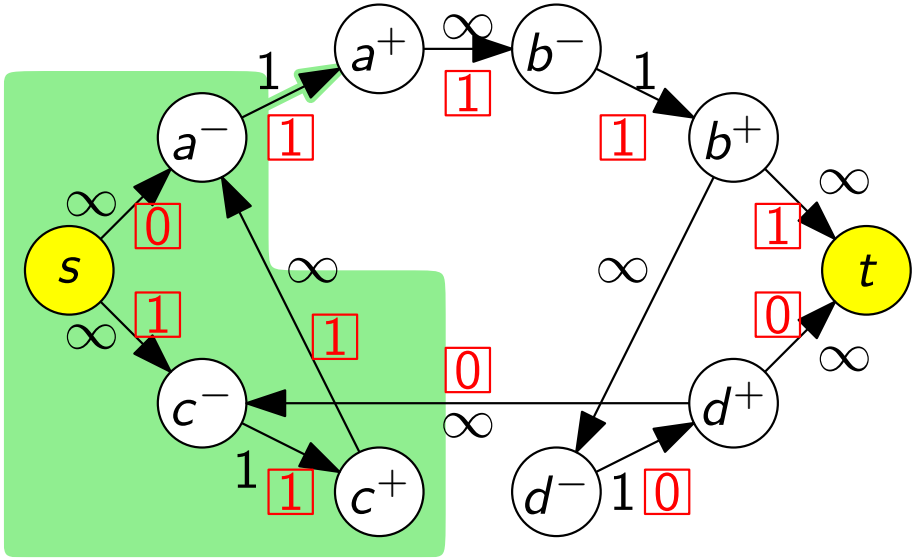




最大流の流量 = 最小カットの容量 = 1

解いた結果を再解釈 (1)

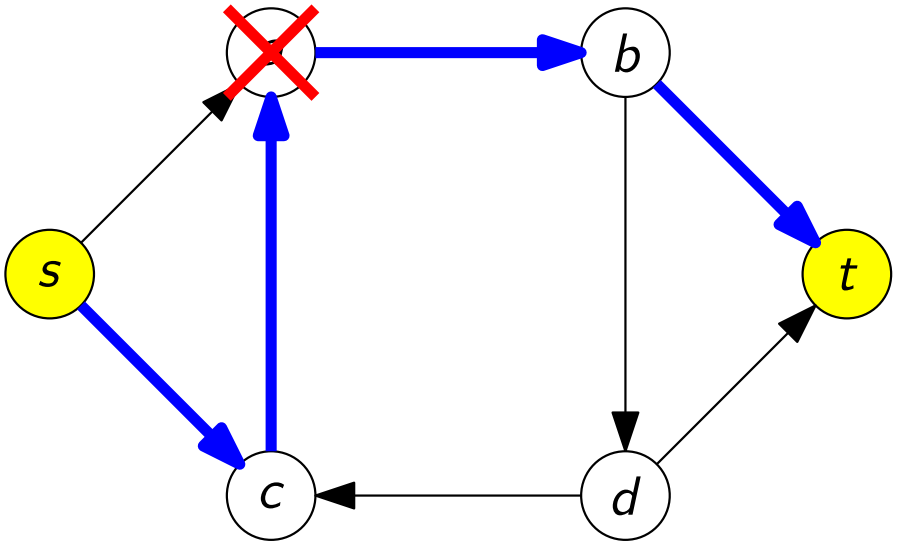


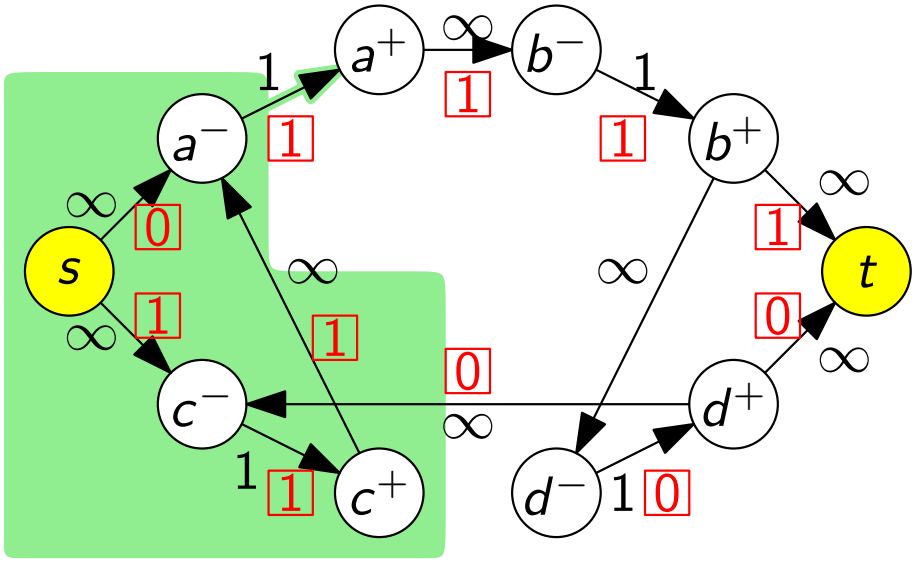


- カットから出る辺に対応する頂点が頂点連結度を与える
- 流れは何に対応するか？

整数性定理と容量の決め方から，各辺上を流れている量は 0 か 1

解いた結果を再解釈 (2)



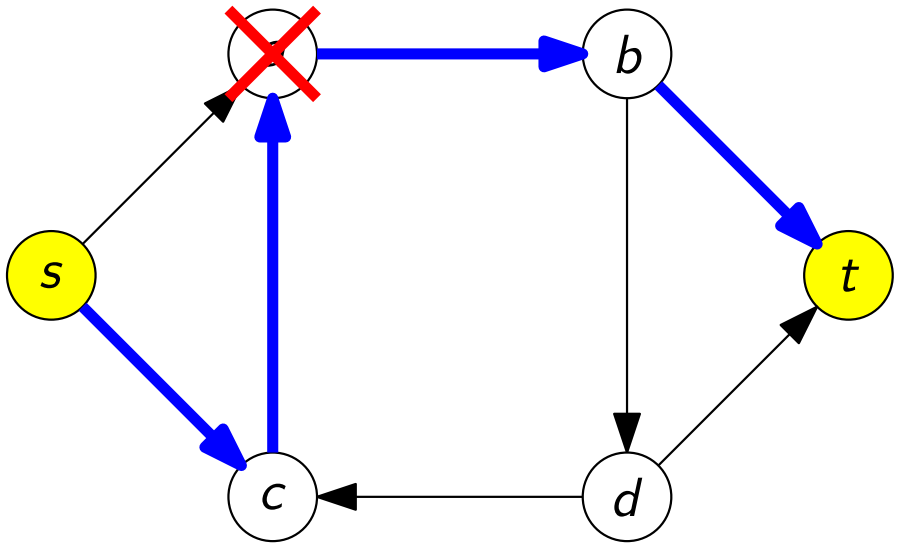


- 1 だけ流れている辺に対応する部分は道になる
- 道の数 = 最大流の流量 = 頂点連結度
- ∴ 流れが道に対応している

「流れ」という比喩

流れ	——	道
たくさん流す	——	道を多く選ぶ

Menger の定理 (頂点連結度版)



Menger の定理

s を始点，t を終点とする道で
頂点を s, t 以外共有しないものの最大数 $=$ s から t への頂点連結度

どんな有向グラフ，どんな s, t でも成り立つ

目次

1. 辺連結度
2. 頂点連結度
3. 割当問題
4. 今日のまとめと今後の予告

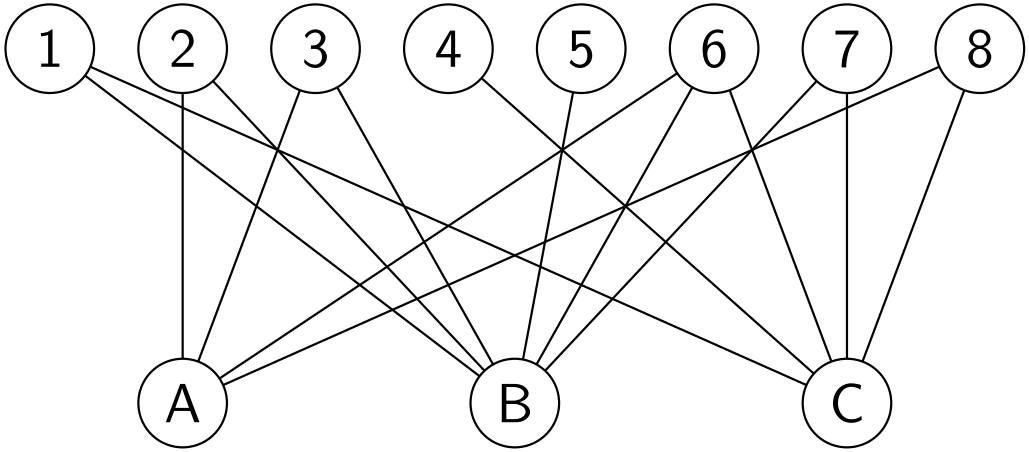
例：オアシスでの救護

- 砂漠で遭難した人々をオアシスで救護したい
- 遭難者は携帯電話によって決められた場所まで歩くよう誘導できる
- 遭難者は 8 人，オアシスは 3 か所
- 各オアシスに対して，各遭難者までの距離と救護可能人数は次の通り
- [問い] どの遭難者も 3km 以上歩かせずに，全員救護できるか？
- 可能ならば，どの遭難者をどのオアシスに歩かせればよいか？

距離 (km)	遭難者 1	2	3	4	5	6	7	8	救護可能人数 (人)
オアシス A	3	2	1	3	4	2	4	1	3
オアシス B	1	1	1	5	1	1	2	3	3
オアシス C	2	4	4	2	4	2	1	2	4

グラフを使って状況整理

- 上側：遭難者，下側：オアシス
- 辺：距離が 3km 未満のオアシスと遭難者の間



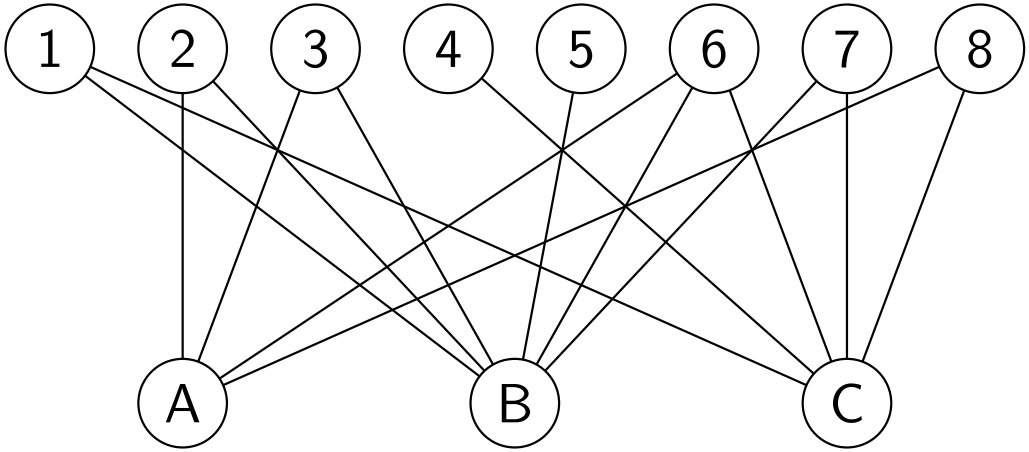
距離 (km)	遭難者 1	2	3	4	5	6	7	8	救護可能人数 (人)
オアシス A	3	2	1	3	4	2	4	1	3
オアシス B	1	1	1	5	1	1	2	3	3
オアシス C	2	4	4	2	4	2	1	2	4

このように，2 つに「分けられる」ようなグラフを二部グラフと呼ぶ

ここからの目標

ここからの目標

この問題を最大流問題として定式化する



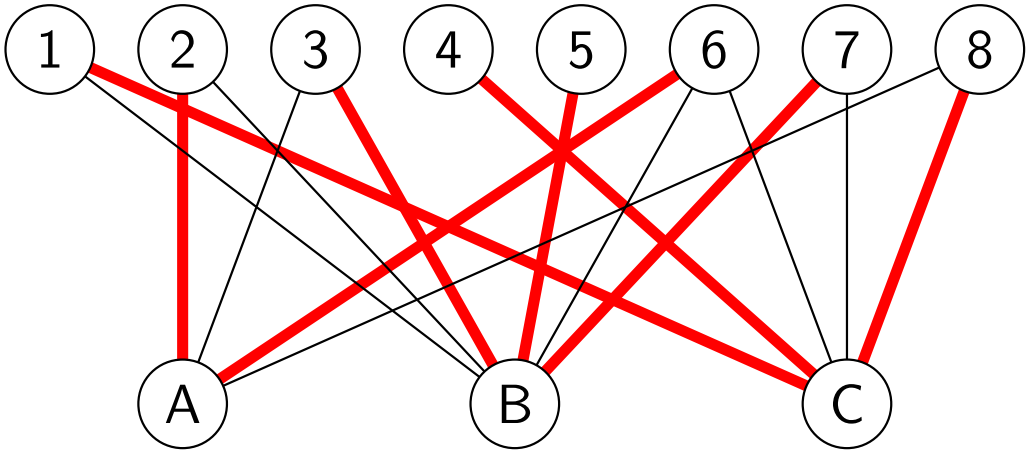
最大救護可能人数を計算する，という問題として捉える

最大流問題としての定式化：着眼点

アイディア：「割り当てる」ことを「流す」ことに対応させる

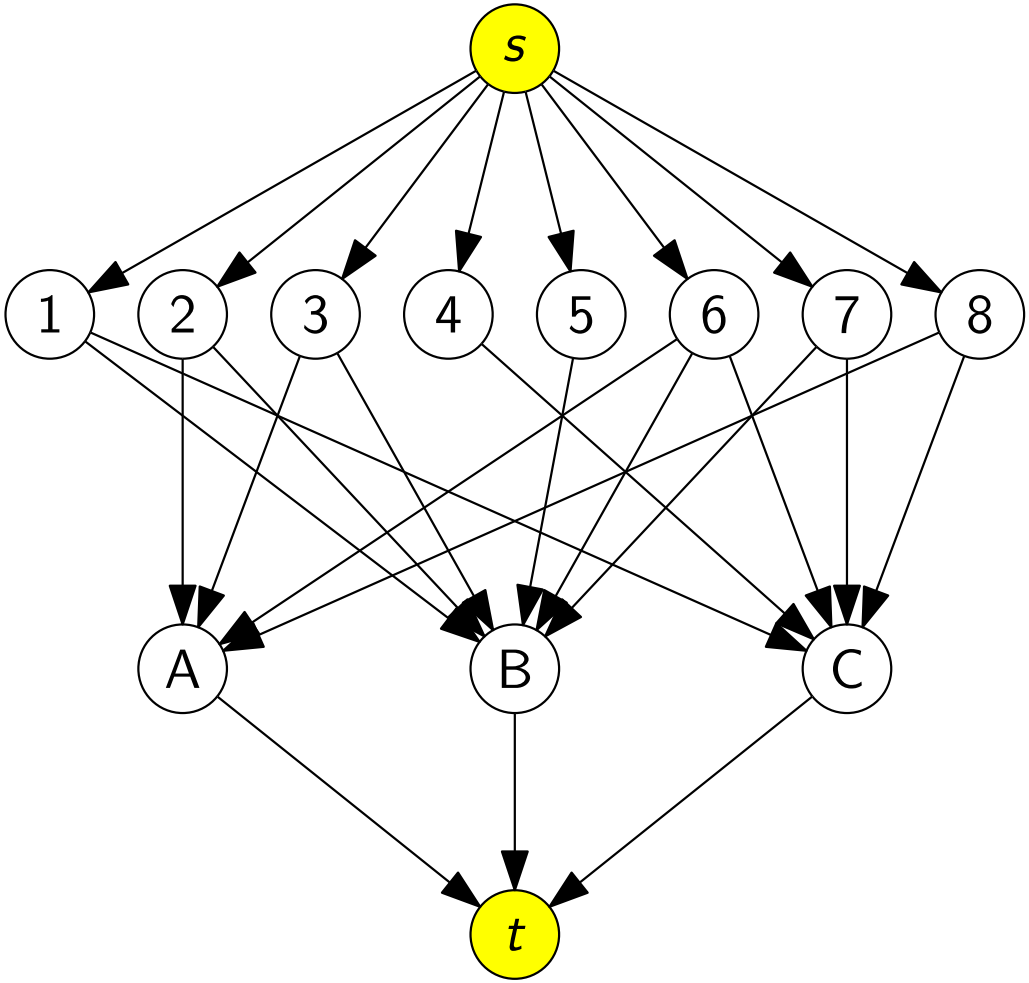
考えるべきこと

- s と t はどこにあるのか？
- 辺の向き，容量はどうするのか？



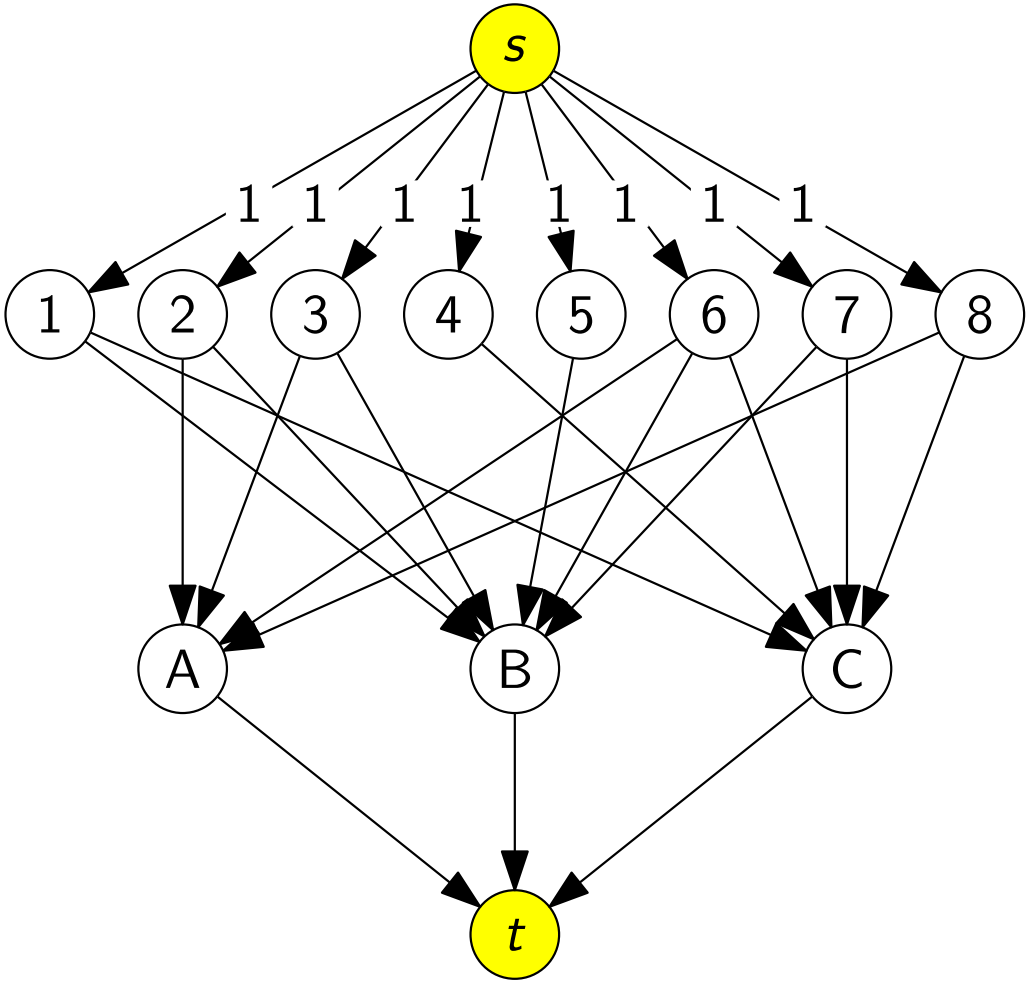
最大流問題としての定式化

s と t を新しい頂点として用意して，このように辺を作る



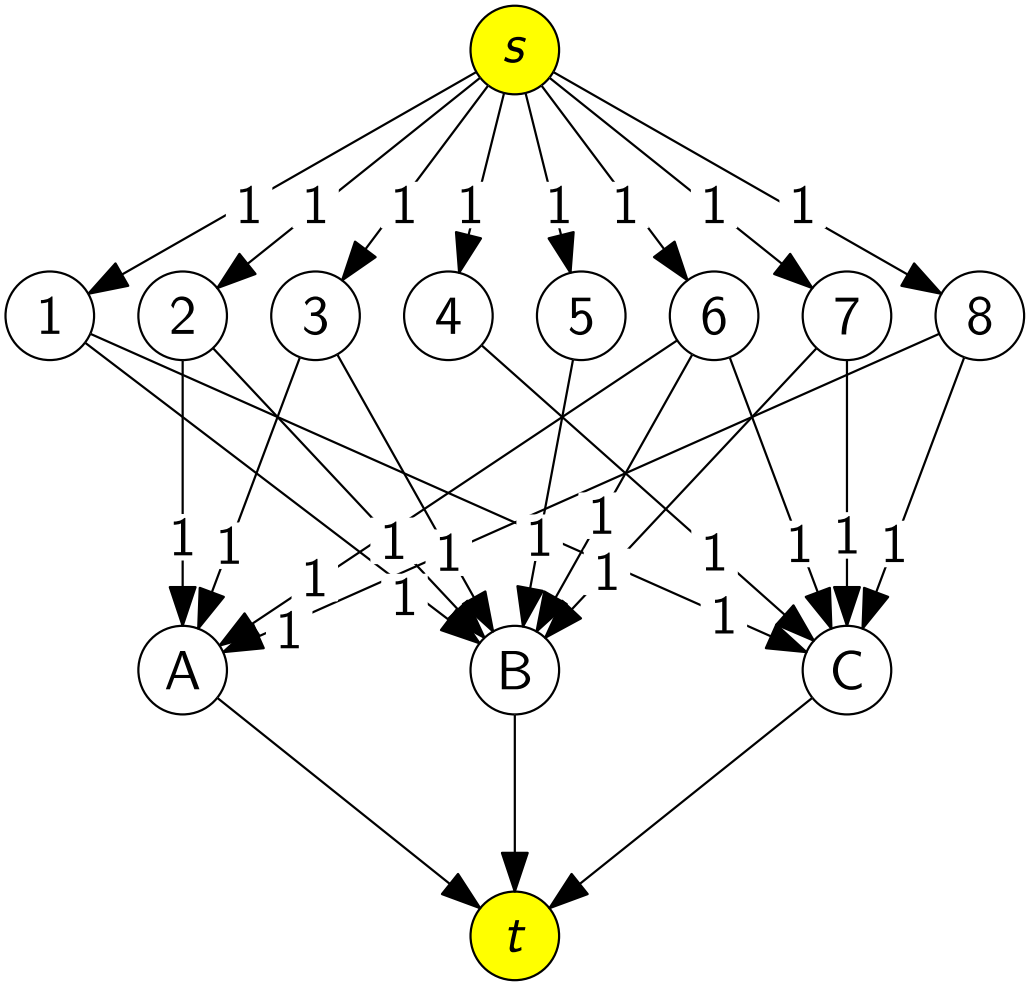
最大流問題としての定式化

s と遭難者の間の辺容量はどれも 1



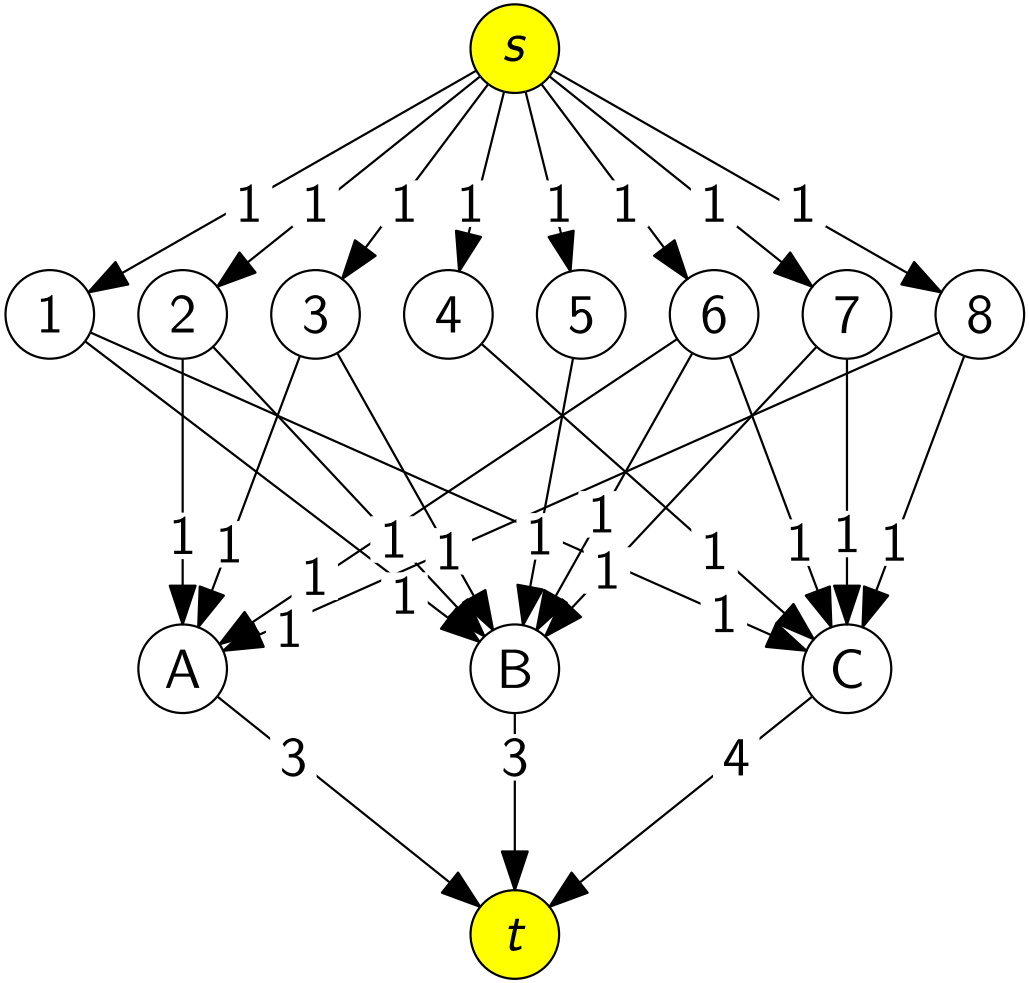
最大流問題としての定式化

遭難者とオアシスの間の辺容量はどれも 1 (非負整数なら何でもよい)

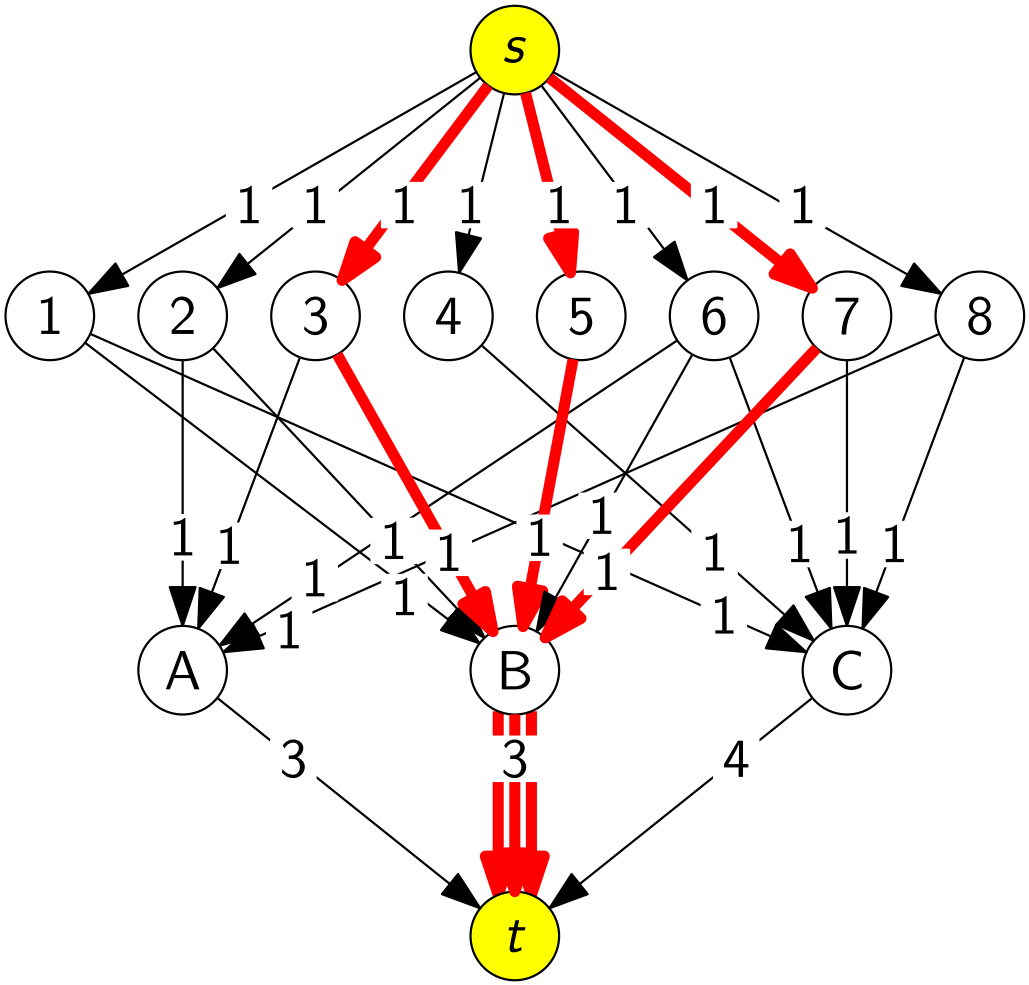


最大流問題としての定式化

オアシスと t の間の辺容量はオアシスの救護可能人数

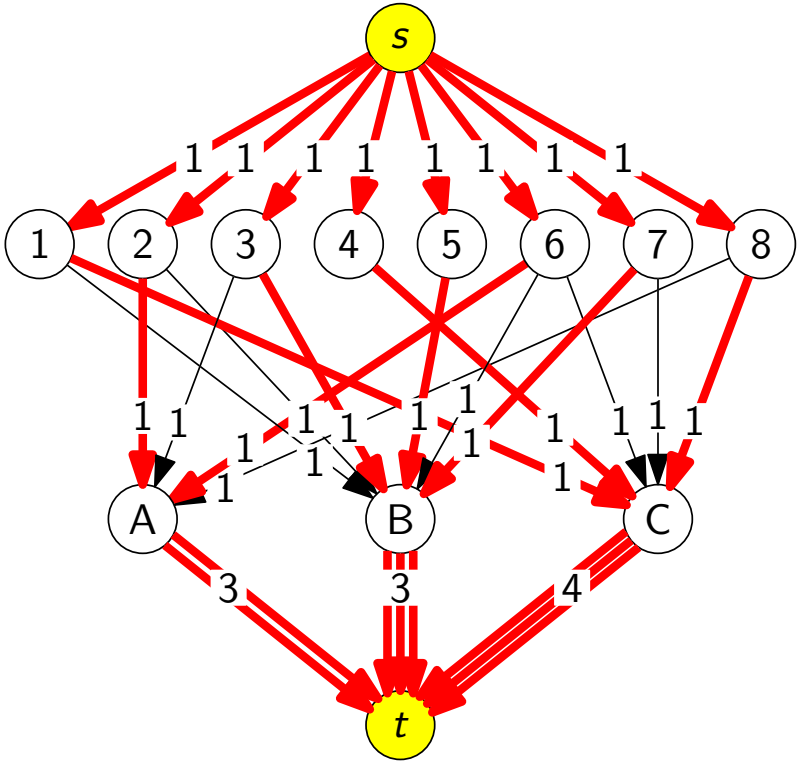


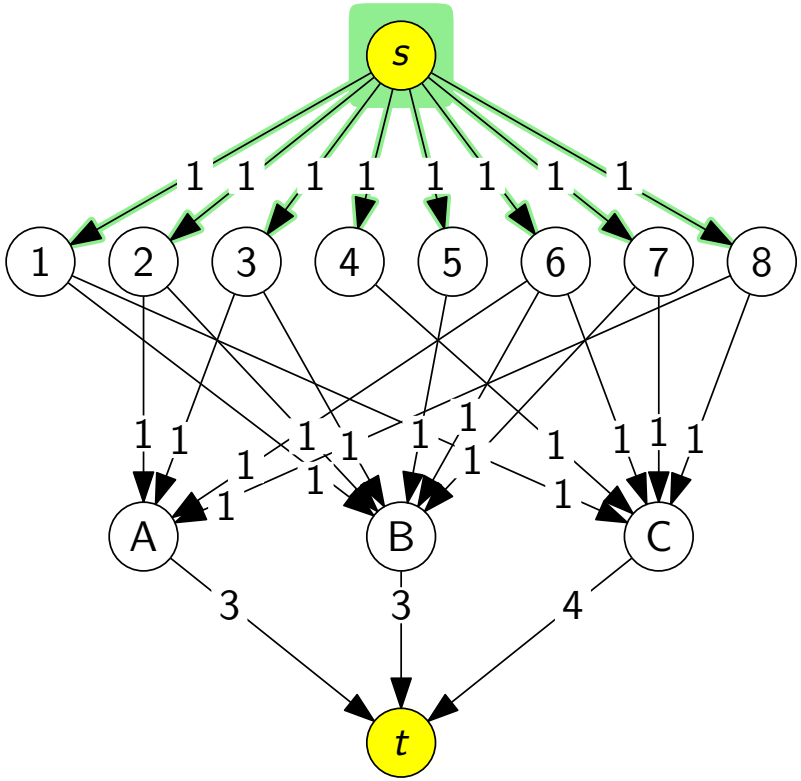
直感：オアシス B で遭難者 3，5，7 を救護してる様子



最大流と最小カット

増加道法を適用すると，例えば，次の最大流と最小カットが得られる





最大流の流量 = 最小カットの容量 = 8

「流れ」という比喩

流れ	——	割当
たくさん流す	——	たくさん割り当てる

目次

1. 辺連結度
2. 頂点連結度
3. 割当問題
4. 今日のまとめと今後の予告

今日のまとめと今後の予告

今日の目標

- 最大流問題を使って，次の問題を解く
  - 連結度計算問題
  - 割当問題 (の許容性判定版)

[復習] 2 つの重要な定理：最大流最小カット定理，整数流定理

今後の予告：ネットワークに関わる 3 つの最適化問題

済 最短路問題

済 最大流問題

- 最大流問題の応用 ← 次回（第 12 回）もココ

- 最小費用流問題

注：ネットワークに関わる最適化問題は他にもたくさんある

次週第 11 回（6 月 18 日）は中間試験 2，場所は 5335 教室
（出題範囲は「ネットワーク最適化」のうち，今回までの内容）

目次

1. 辺連結度
2. 頂点連結度
3. 割当問題
4. 今日のまとめと今後の予告