最適化手法 第 9 回

ネットワーク最適化 (3)

— 最大流問題 —

後藤 順哉
中央大学 理工学部 経営システム工学科

2014 年 6 月 4 日

今日の概要

今日の目標

- 最大流問題の定義と解法を理解する
- 最大流問題を線形計画問題として定式化できるようになる
- 最大流問題を増加道法によって解けるようになる

2 つの重要な定理：最大流最小カット定理，整数流定理

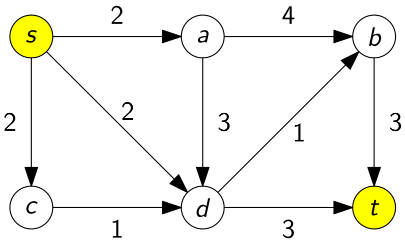
目次

最大流問題とは？

最大流問題とは？

入力

- 有向グラフ $G = (V, E)$，各辺 $e \in E$ の容量，2 頂点 $s, t \in V$
  (辺の容量は非負実数)



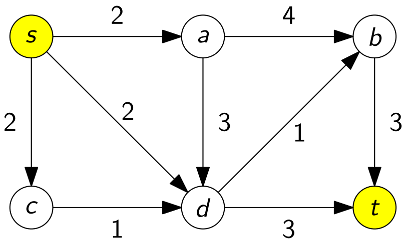
最大流問題とは？

最大流問題とは？

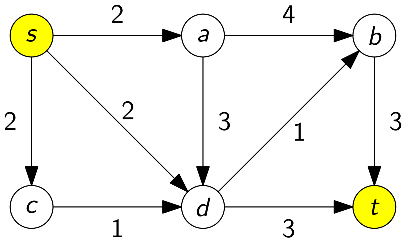
出力

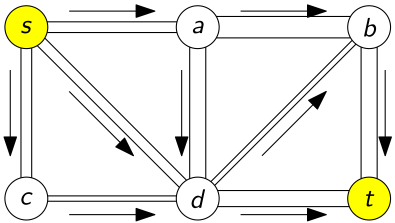
- s から t へ至る流れで，その流量が最大のもの

(s から t への最大流)

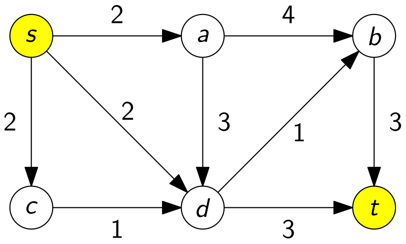


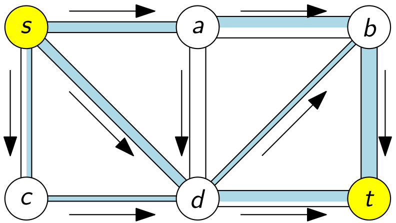
流れとは?: 直感 (1)



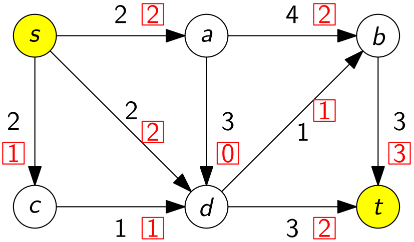


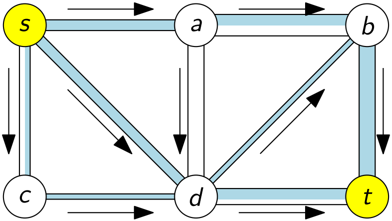
流れとは？: 直感 (2)





流れとは?: 直感 (3)





流れとは？

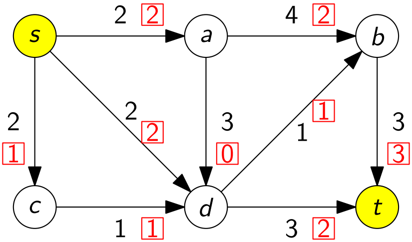
s から t への流れ (**flow**) とは？

- s から湧き出る総量 $=$ t へ流れ込む総量 (流れの流量とよぶ)
- s, t 以外の頂点 v において, (流量保存制約)

  $$v \text{ から流れ出る総量} = v \text{ へ流れ入る総量}$$

- 各辺 e において, (容量制約)

  $$0 \leq e \text{ を流れる量} \leq e \text{ の容量}$$



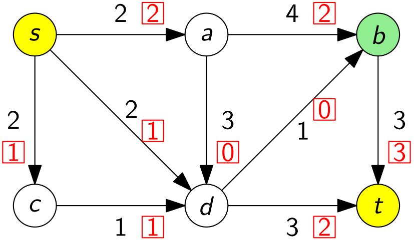
これは流れか？ (1)

s から t への流れ (flow) とは？

- s から湧き出る総量 $=$ t へ流れ込む総量
- s, t 以外の頂点 v において，

  v から流れ出る総量 $=$ v へ流れ入る総量
- 各辺 e において，

  $0 \leq$ e を流れる量 $\leq$ e の容量



流れではない

これは流れか？ (2)

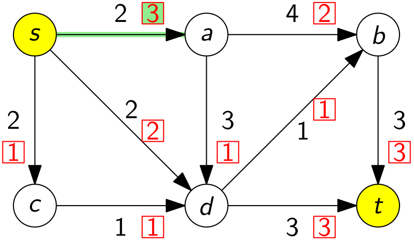
s から t への流れ (flow) とは？

- s から湧き出る総量 $=$ t へ流れ込む総量
- s, t 以外の頂点 v において，

  v から流れ出る総量 $=$ v へ流れ入る総量

- 各辺 e において，

  $0 \le e$ を流れる量 $\le e$ の容量



流れではない

これは流れか？ (3)

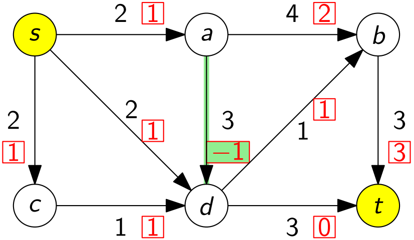
s から t への流れ (flow) とは？

- s から湧き出る総量 $=$ t へ流れ込む総量
- s, t 以外の頂点 v において，

$$v \text{ から流れ出る総量} = v \text{ へ流れ入る総量}$$

- 各辺 e において，

$$0 \leq e \text{ を流れる量} \leq e \text{ の容量}$$



流れではない

これは流れか？ (4)

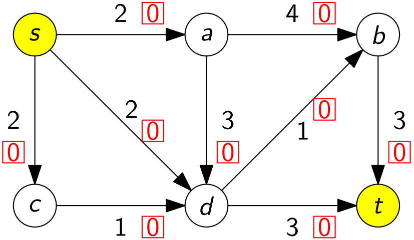
s から t への流れ (flow) とは？

- s から湧き出る総量 $=$ t へ流れ込む総量
- s, t 以外の頂点 v において，

$$v \text{ から流れ出る総量} = v \text{ へ流れ入る総量}$$

- 各辺 e において，

$$0 \leq e \text{ を流れる量} \leq e \text{ の容量}$$

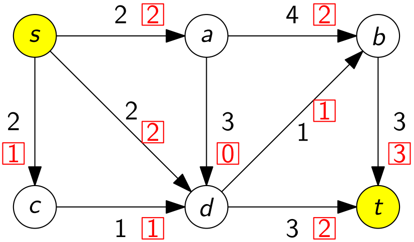


流れである

最大流問題が出てくる場面：配送問題

- 有向グラフは 道路ネットワーク をモデル化
- s は 部品工場 をモデル化
- t は 組立工場 をモデル化
- 辺の容量は 道幅 をモデル化

最大流問題 $=$ できるだけ多くの部品を組み立て工場に運ぶには？



他の応用は後の講義で

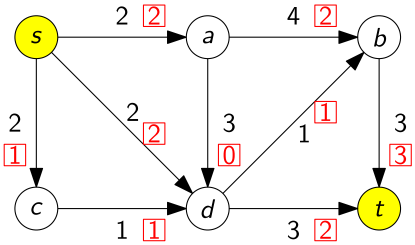
最大流問題の解き方

解き方 1：線形計画問題として定式化

例えば，単体法を用いて解く

解き方 2：最大流問題独自のアルゴリズムを利用

例えば，増加道法を用いて解く

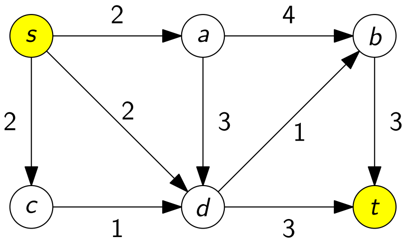


目次

最大流問題の解き方

解き方 1：線形計画問題として定式化

例えば，単体法を用いて解く



今からやること

この有向グラフに対する最大流問題を線形計画問題として定式化

最適化モデル作成のポイント — 第 2 回の講義から

最適化モデル作成のポイント：基礎

次を明確にする

- 変数は何か？ 何を変数は表すのか？
- 目的関数は何か？ 何を最適化するのか？
- 制約は何か？ 何を制約は表すのか？

最適化モデル作成のポイント：基礎の次

次を心がける

- 「非線形よりも線形」を目指す
- 「整数計画よりも 01 整数計画」を目指す
- 「big-M は使わない」を目指す

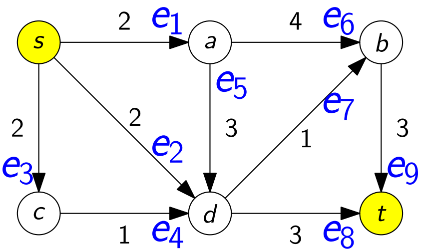
最大流問題：変数

決定すべきこと：どの辺にどれだけ流すか (量)

- 各辺 $e_i \in \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$ に対して

$$x_i \in \mathbb{R}$$

  という変数を設定する
- 解釈：辺 e_i の上を流れる量が x_i である
- 変数の数 $= 9$ (辺の数)



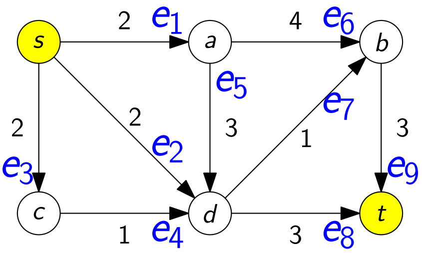
最大流問題：目的関数

最適化するもの：流量

- 目的は

$$\text{最大化} \quad x_1 + x_2 + x_3$$

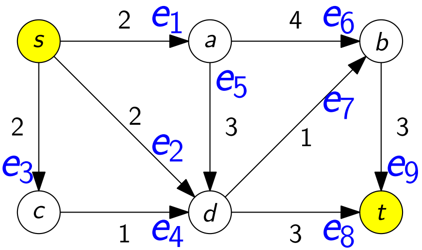
- 解釈：流量



最大流問題：制約 (1)

制約 (1)：容量制約

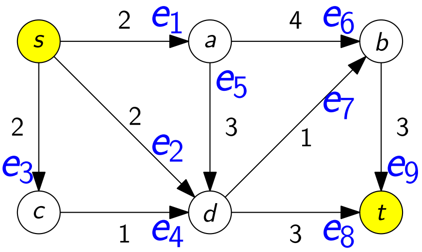
- $0 \leq x_1 \leq 2$
- $0 \leq x_2 \leq 2$
- $0 \leq x_3 \leq 2$
- $0 \leq x_4 \leq 1$
- $0 \leq x_5 \leq 3$
- $0 \leq x_6 \leq 4$
- $0 \leq x_7 \leq 1$
- $0 \leq x_8 \leq 3$
- $0 \leq x_9 \leq 3$



最大流問題：制約 (2)

制約 (2)：流量制約

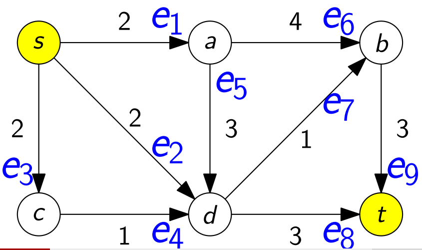
- $x_1 = x_5 + x_6$ (頂点 a に関して)
- $x_6 + x_7 = x_9$ (頂点 b に関して)
- $x_3 = x_4$ (頂点 c に関して)
- $x_2 + x_4 + x_5 = x_7 + x_8$ (頂点 d に関して)



最大流問題：線形計画モデルの完成

最大流問題に対する線形計画問題としての定式化

$$
\begin{array}{ll}
\underset{\boldsymbol{x}}{\text{最大化}} & x_1 + x_2 + x_3 \\
\text{条　件} & x_1 = x_5 + x_6, x_6 + x_7 = x_9, \\
& x_3 = x_4, x_2 + x_4 + x_5 = x_7 + x_8, \\
& 0 \le x_1 \le 2, 0 \le x_2 \le 2, 0 \le x_3 \le 2, 0 \le x_4 \le 1, 0 \le x_5 \le 3, \\
& 0 \le x_6 \le 4, 0 \le x_7 \le 1, 0 \le x_8 \le 3, 0 \le x_9 \le 3, \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 \in \mathbb{R}
\end{array}
$$



本当にこれでいいのか？

s から t への流れ (flow) とは？ (再掲)

- s から湧き出る総量 $=$ t へ流れ込む総量
- s, t 以外の頂点 v において，

  v から流れ出る総量 $=$ v へ流れ入る総量
- 各辺 e において，

  $0 \leq e$ を流れる量 $\leq e$ の容量

問題点？

一番上の等式を制約として記述していない気がする

回答

記述しなくても問題ない ($\because$ その等式が他の制約から導かれるから)

一番上の等式を制約として記述しなくてもよいことの説明

最大流問題に対する線形計画問題としての定式化 (再掲)

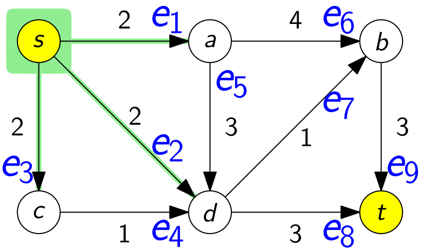
$$
\begin{array}{ll}
\underset{\boldsymbol{x}}{\text{最大化}} & x_1 + x_2 + x_3 \\
\text{条　件} & x_1 = x_5 + x_6, x_6 + x_7 = x_9, \\
& x_3 = x_4, x_2 + x_4 + x_5 = x_7 + x_8, \\
& 0 \le x_1 \le 2, 0 \le x_2 \le 2, 0 \le x_3 \le 2, 0 \le x_4 \le 1, 0 \le x_5 \le 3, \\
& 0 \le x_6 \le 4, 0 \le x_7 \le 1, 0 \le x_8 \le 3, 0 \le x_9 \le 3, \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 \in \mathbb{R}
\end{array}
$$

$(x_1, \ldots, x_9)$ がこの問題の許容解であるとき，

$$
\underbrace{x_1 + x_2 + x_3}_{s\text{ から湧き出る総量}} = x_5 + x_6 + x_2 + x_4 = x_6 + x_7 + x_8 = \underbrace{x_9 + x_8}_{t\text{ へ流れ込む総量}}
$$

この等式に対する別の視点

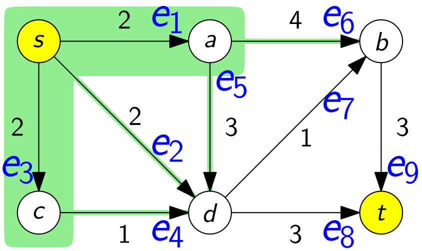
s と t を「分ける」部分で流れる総量



$$\underbrace{x_1 + x_2 + x_3}_{s\text{ から湧き出る総量}} = x_5 + x_6 + x_2 + x_4 = x_6 + x_7 + x_8 = \underbrace{x_9 + x_8}_{t\text{ へ流れ込む総量}}$$

この等式に対する別の視点

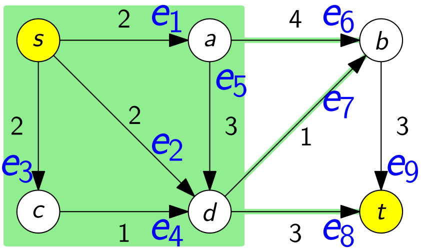
s と t を「分ける」部分で流れる総量



$$\underbrace{x_1 + x_2 + x_3}_{s\,\text{から湧き出る総量}} = x_5 + x_6 + x_2 + x_4 = x_6 + x_7 + x_8 = \underbrace{x_9 + x_8}_{t\,\text{へ流れ込む総量}}$$

この等式に対する別の視点

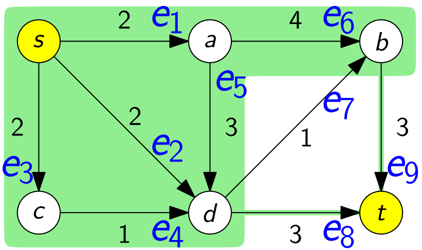
s と t を「分ける」部分で流れる総量



$$\underbrace{x_1 + x_2 + x_3}_{s\text{ から湧き出る総量}} = x_5 + x_6 + x_2 + x_4 = x_6 + x_7 + x_8 = \underbrace{x_9 + x_8}_{t\text{ へ流れ込む総量}}$$

この等式に対する別の視点

s と t を「分ける」部分で流れる総量



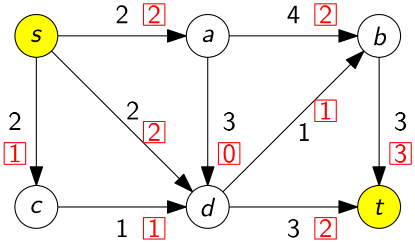
$$\underbrace{x_1 + x_2 + x_3}_{s\text{ から湧き出る総量}} = x_5 + x_6 + x_2 + x_4 = {\color{red}x_6 + x_7} + x_8 = \underbrace{{\color{red}x_9} + x_8}_{t\text{ へ流れ込む総量}}$$

目次

最大流問題の解き方

解き方 2：最大流問題独自のアルゴリズムを利用

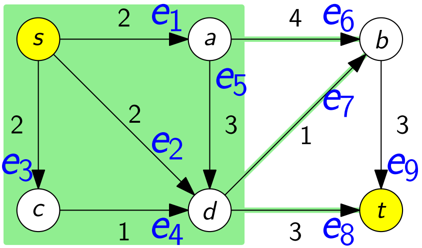
例えば，増加道法を用いて解く



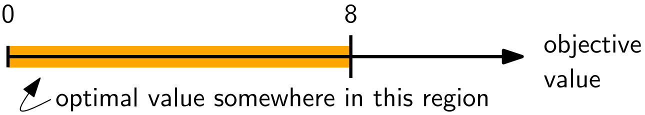
今からやること

そのための準備として「カット」を導入する

カット容量による上界：例

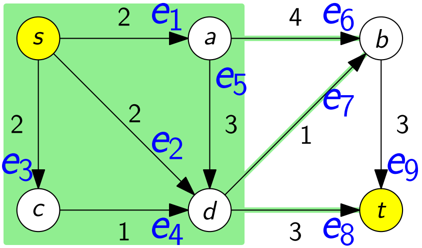


- s から t への流量は e_6, e_7, e_8 の容量和以下である
- つまり，最大流量 $\leq 4 + 1 + 3 = 8$



カット容量による上界：もう少し形式的に (1)

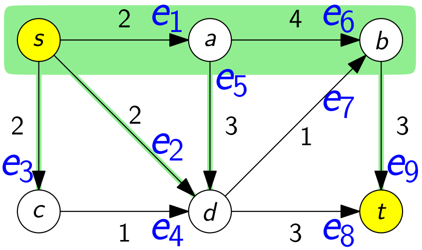
- カットとは，s を含み，t を含まない，頂点部分集合
- カットの容量とは，そこから出ていく辺の容量の和



$\{s, a, c, d\}$ はカットで，その容量は 8

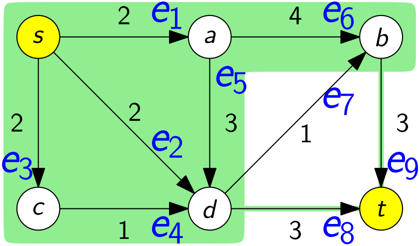
カット容量による上界：もう少し形式的に (2)

- カットとは，s を含み，t を含まない，頂点部分集合
- カットの容量とは，そこから出ていく辺の容量の和

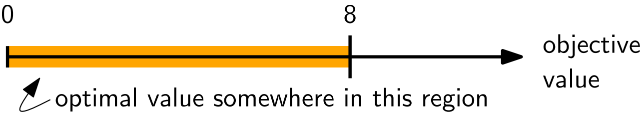


$\{s, a, b\}$ はカットで，その容量は 10
注意：e_7 の容量はカットの容量に含めない

カット容量による上界の更新

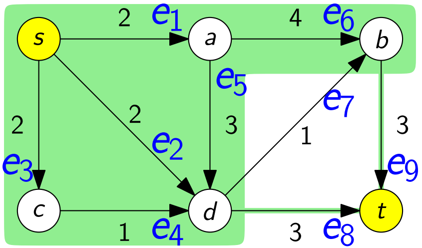


- s から t への流量はこのカットの容量以下である
- つまり，最大流量 ≤ 6

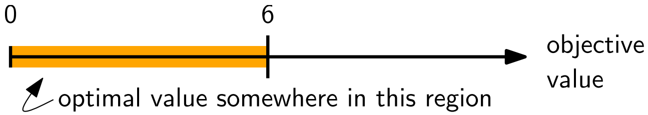


質問：もっと容量の小さいカットはあるか？

カット容量による上界の更新

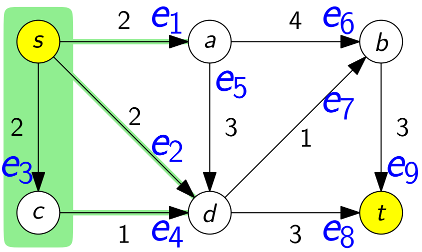


- s から t への流量はこのカットの容量以下である
- つまり，最大流量 ≤ 6

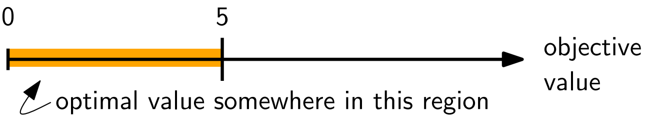


質問：もっと容量の小さいカットはあるか？

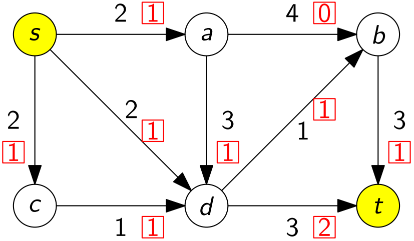
カット容量による上界の更新 (2)



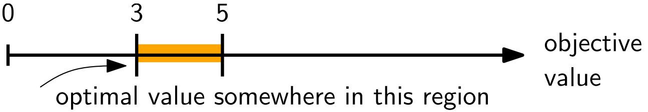
- s から t への流量はこのカットの容量以下である
- つまり，最大流量 ≤ 5



流れによる下界の更新 (1)

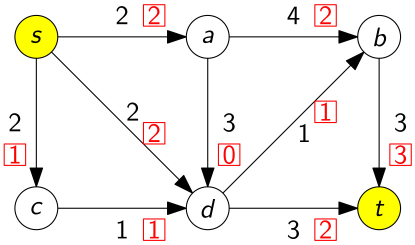


- これは流れであり，その流量は 3
- つまり，最大流量 ≥ 3

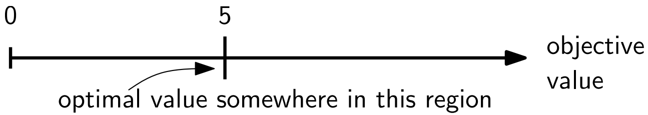


質問：もっと流量の大きな流れはあるか？

流れによる下界の更新 (2)

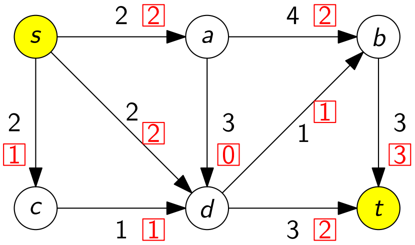


- これは流れであり，その流量は 5
- つまり，最大流量 ≥ 5

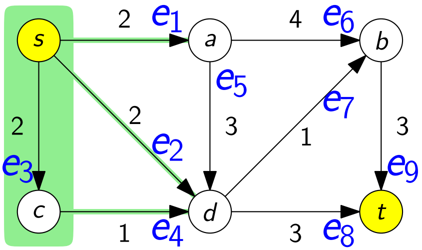


つまり，この流れは最大流であり，最大流量は 5 である！

最大流と最小カット



最大流量 ≥ 5

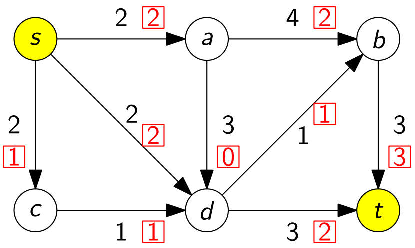


最大流量 ≤ 5

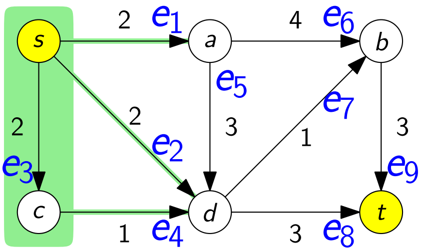
したがって

- 左の図にある流れは最大流であり，その流量は 5
- 右の図にあるカットは最小カットであり，その容量は 5

最大流最小カット定理



最大流量 ≥ 5



最大流量 ≤ 5

最大流最小カット定理 **(Ford, Fulkerson ’56)**

最大流問題において，必ず

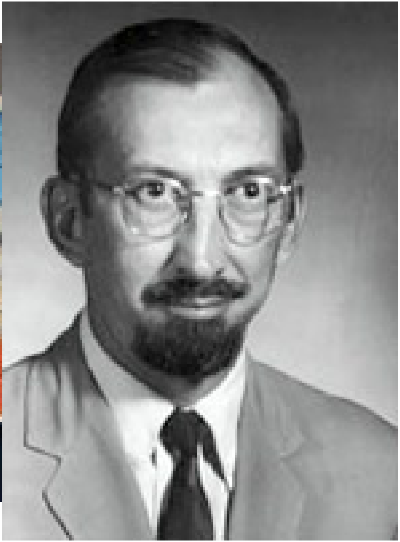
$$\text{最大流量} = \text{最小カット容量}$$

が成立する

つまり，この例のような「幸運」は必ず起こる！

Lester R. Ford, Jr. と Delbert R. Fulkerson

L. R. Ford, Jr.
フォード



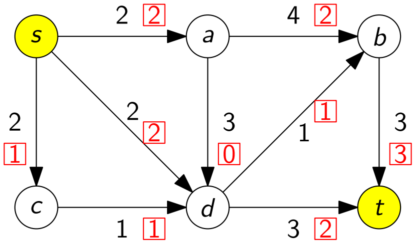
D. R. Fulkerson

目次

最大流問題の解き方

解き方 2：最大流問題独自のアルゴリズムを利用

例えば，増加道法を用いて解く

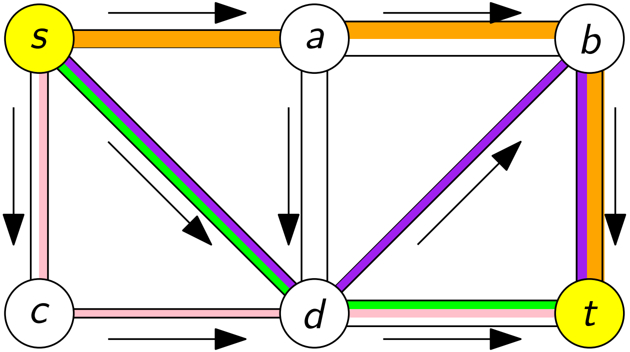


今からやること

増加道法を説明する

- 重要概念：補助ネットワーク，増加道
- 最大流最小カットの定理も用いる

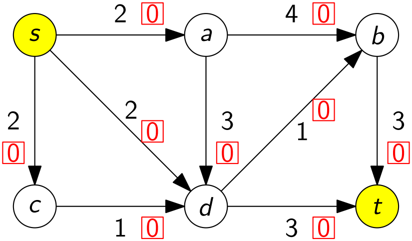
増加道法：基本アイディア



- 事実：「流れ」は「道に沿った流れ」に分解できる
- 方針：「道に沿った流れ」を次々と見つけていく

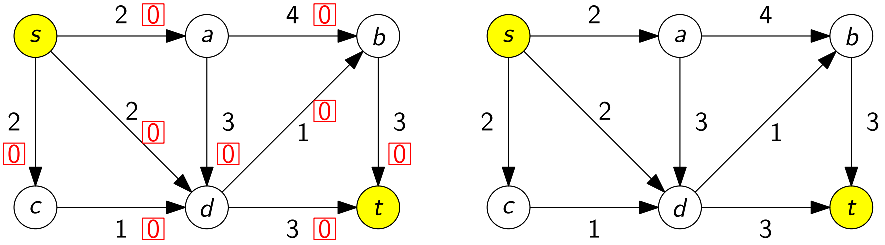
増加道法の動き (1)

任意の流れから始める (例えば，どの辺の上にも 0 だけ流れるもの)



増加道法の動き (1)：補助ネットワークの作成

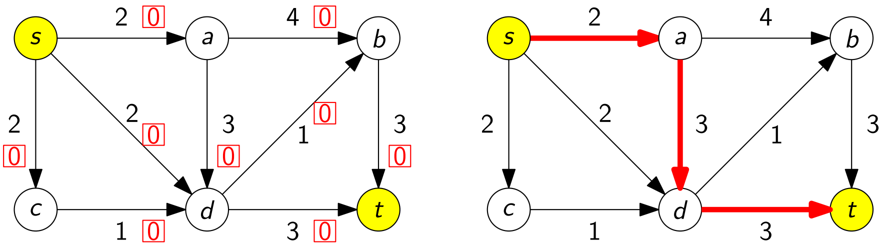
補助ネットワークを作る



この場合は，始めのグラフと同じ
(次から変わるので，定義はそこで説明)

増加道法の動き (1)：増加道の発見

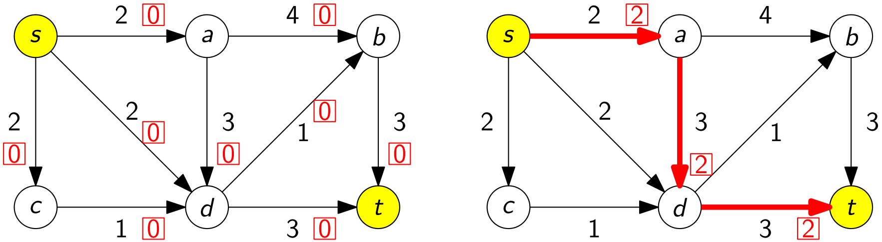
補助ネットワークにおいて，s を始点，t を終点とする道を見つける



このような道を増加道 (ぞうかどう) と呼ぶ

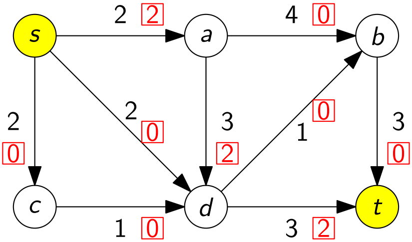
増加道法の動き (1)：流れの増加

道に沿って，できる限り流れを増加させる



増加道法の動き (2)

現在得られている流れ

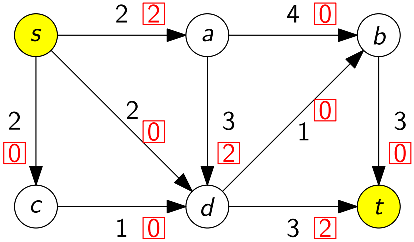


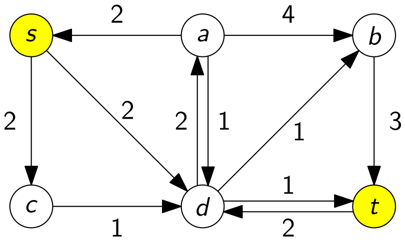
先ほどの手順を繰り返す

- 補助ネットワークの作成
- 増加道の発見
- 流れの増加

増加道法の動き (2)：補助ネットワークの作成

補助ネットワークを作る



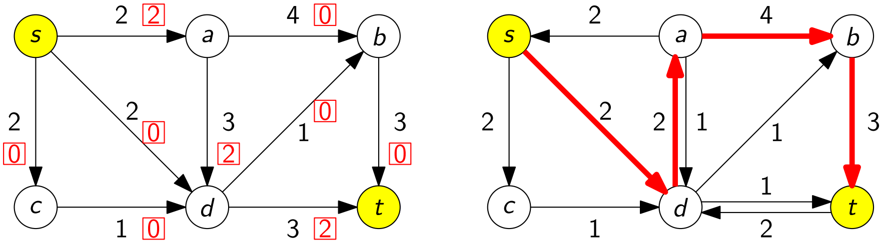


補助ネットワークとは？

- 頂点集合はもとの有向グラフと同じ
- 2 頂点間に辺がある ⇔ その辺を通して流せる (逆向き辺に注意)
- 辺の容量 = 流せる最大量

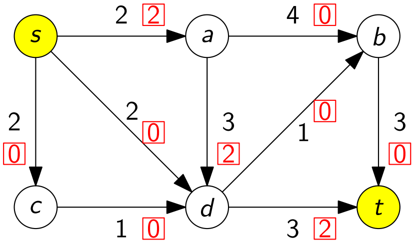
増加道法の動き (2)：増加道の発見

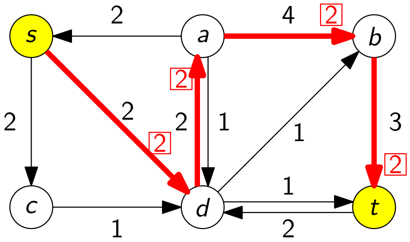
補助ネットワークにおいて，s を始点，t を終点とする道を見つける



増加道法の動き (2)：流れの増加

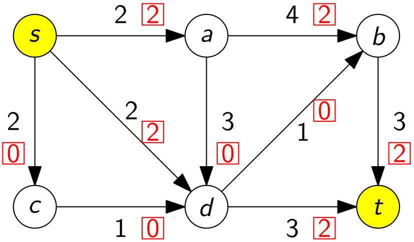
道に沿って，できる限り流れを増加させる





増加道法の動き (3)

現在得られている流れ

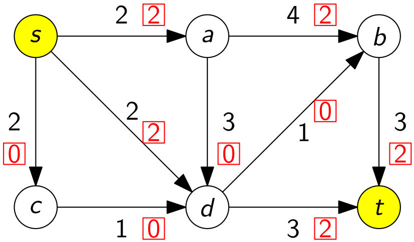


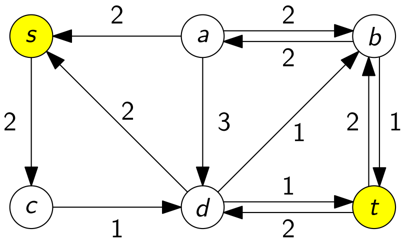
先ほどの手順を繰り返す

- 補助ネットワークの作成
- 増加道の発見
- 流れの増加

増加道法の動き (3)：補助ネットワークの作成

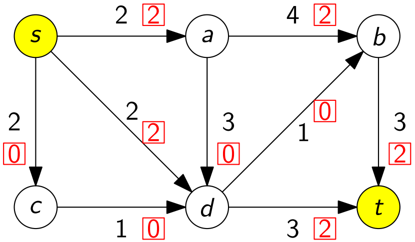
補助ネットワークを作る

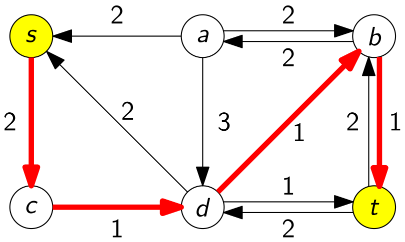




増加道法の動き (3)：増加道の発見

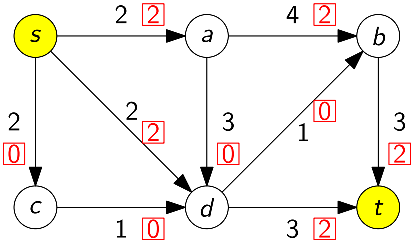
補助ネットワークにおいて，s を始点，t を終点とする道を見つける

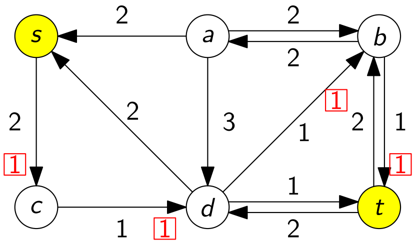




増加道法の動き (3)：流れの増加

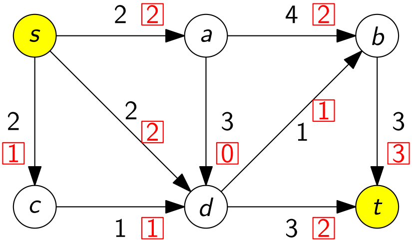
道に沿って，できる限り流れを増加させる





増加道法の動き (4)

現在得られている流れ

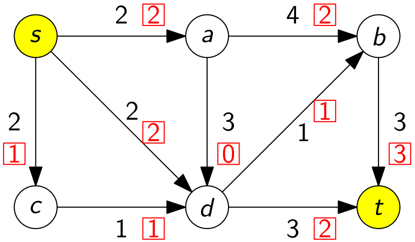


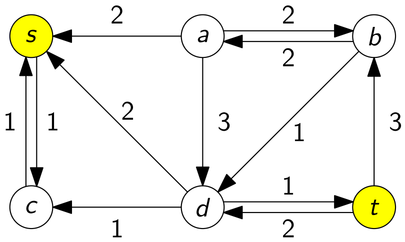
先ほどの手順を繰り返す

- 補助ネットワークの作成
- 増加道の発見
- 流れの増加

増加道法の動き (4)：補助ネットワークの作成

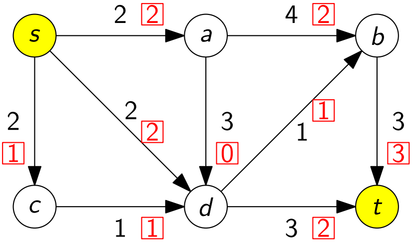
補助ネットワークを作る

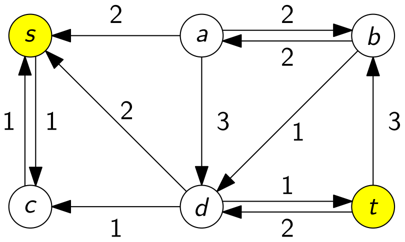




増加道法の動き (4)：増加道の発見

補助ネットワークにおいて，s を始点，t を終点とする道を見つける

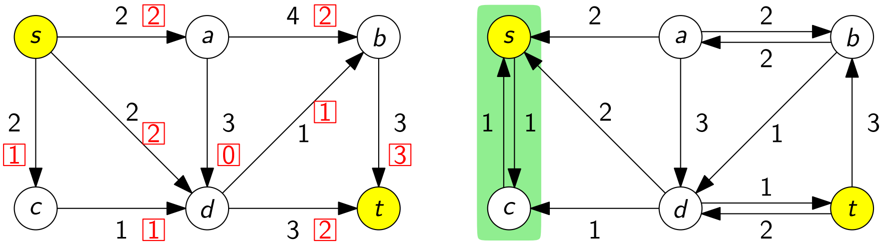




しかし，見つからない！ (存在しない) $\rightsquigarrow$ アルゴリズムは次の段階へ

増加道法の動き (4)：到達可能頂点の探索

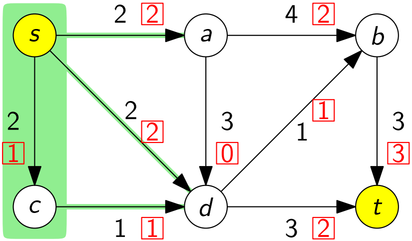
補助ネットワークにおいて，s から到達可能な頂点をすべて見つける

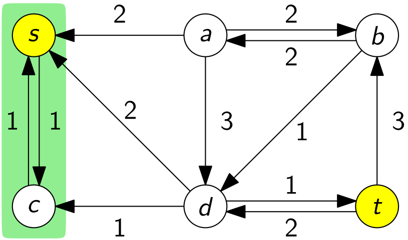


⇝ これはカットである

増加道法の動き (4)：最小カットの発見

元の有向グラフにおいて，このカットの容量を見る



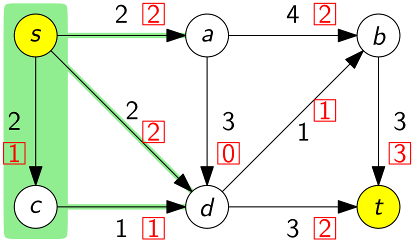


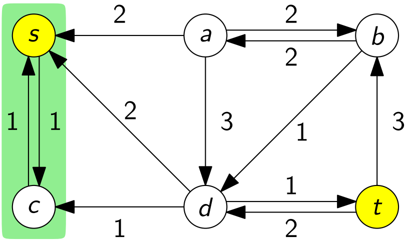
⇝ この容量は得られた流れの流量に等しい

- つまり，最大流と最小カットが得られた！ (アルゴリズム停止)

増加道法から見た最大流最小カット定理

なぜ，このカットが最小カットなのか？

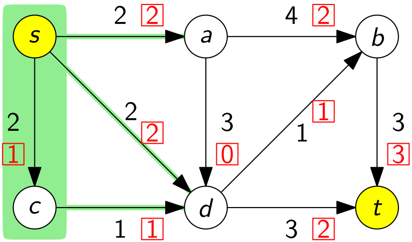




- 補助ネットワークにおいて，カットから出ていく辺は存在しない
- カットから出ていく流れの総量 $= 5$ なので，最大流量 ≥ 5
- カットの容量 $= 5$ なので，最小カット容量 ≤ 5
- $\therefore 5 \leq$ 最大流量 $\leq$ 最小カット容量 ≤ 5
- $\therefore$ 最大流量 $=$ 最小カット容量 $= 5$

整数流定理

増加道法で，流れを増加させるとき，その増加分は必ず整数だった

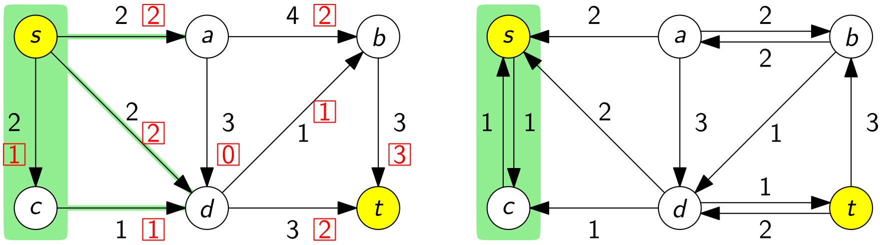


なぜか？

- はじめの容量がすべて整数
- ∴ はじめの増加分は必ず整数
- ∴ 補助ネットワークの容量もすべて整数
- ∴ 毎回，増加分は必ず整数

整数流定理

増加道法で，流れを増加させるとき，その増加分は必ず整数だった



整数流定理

容量がすべて整数 $\Rightarrow$ どの辺に流れる量も整数である最大流が存在

増加道法に対する注意

注意 1

辺の容量に無理数が出てくるとき，

- 増加道法が有限ステップで終了しないこともある
- 増加道法の収束先が最大流ではないこともある
- その 2 つが同時に起こることもある

注意 2

増加道法における，増加道の選び方は工夫できる

- 工夫しない (Ford-Fulkerson のアルゴリズム)
- 幅優先探索を用いる (Edmonds-Karp のアルゴリズム)

Edmonds-Karp のアルゴリズムは多項式時間アルゴリズムである
(Ford-Fulkerson のアルゴリズムはそうではない)

目次

今日のまとめと今後の予告

今日の目標

- 最大流問題の定義と解法を理解する
- 最大流問題を線形計画問題として定式化できるようになる
- 最大流問題を増加道法によって解けるようになる

2 つの重要な定理：最大流最小カット定理，整数流定理

今後の予告：ネットワークに関わる 3 つの最適化問題

済 最短路問題

済 最大流問題

  - 最大流問題の応用

- 最小費用流問題

注：ネットワークに関わる最適化問題は他にもたくさんある

目次