

最適化手法 第 6 回

ネットワーク最適化 (1)

— ネットワークの導入，ネットワークによるモデリング —

後藤 順哉

中央大学 理工学部 経営システム工学科

2014 年 5 月 14 日

今日の概要

今日の目標

- グラフに関する用語を理解して，正しく使えるようになる

ことわり

本講義で用いる資料は，電気通信大学 岡本吉央先生が 2013 年度前期「最適化手法」で用いた資料を，後藤が適宜変更して用いています．

目次

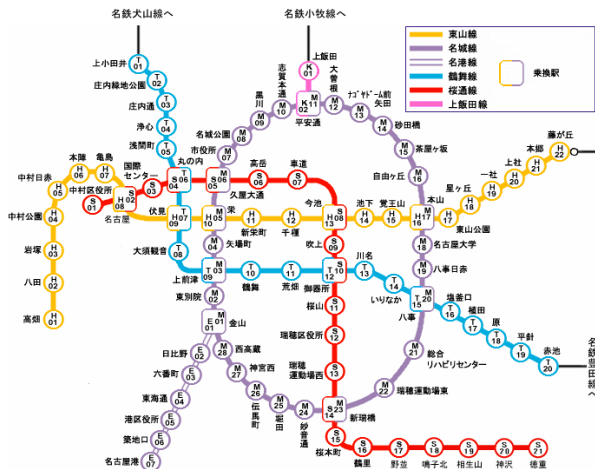
① ネットワークの展覧会

② グラフの定義

③ グラフの用語

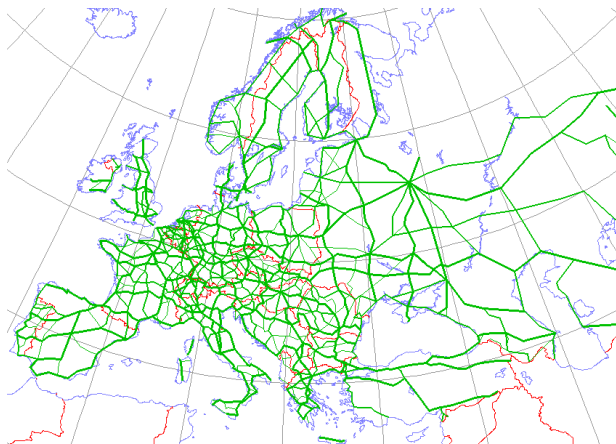
④ 今日のまとめと今後の予告

路線図



http://www.kotsu.city.nagoya.jp/subway/sub_route.html

道路ネットワーク



http://en.wikipedia.org/wiki/File:International_E_Road_Network_green.png

輸送ネットワーク

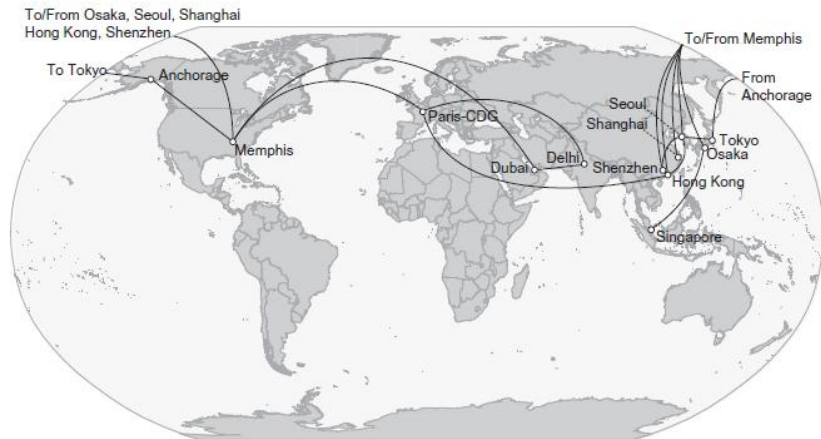
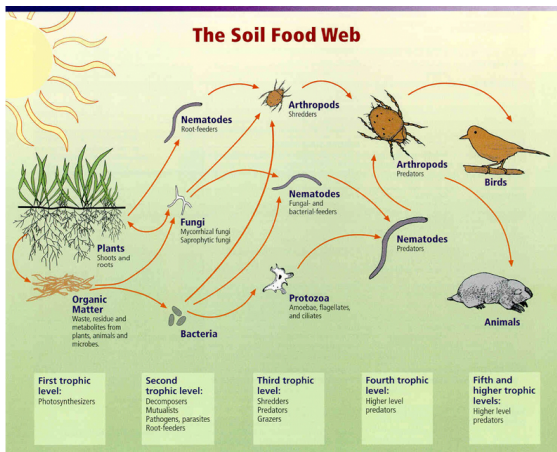


Fig. 8. FedEx Boeing 777-200LR direct lanes. Source: FedEx (2011b).

J. T. Bowen Jr. (2012), J. Trans. Geography, 24, pp. 419–431

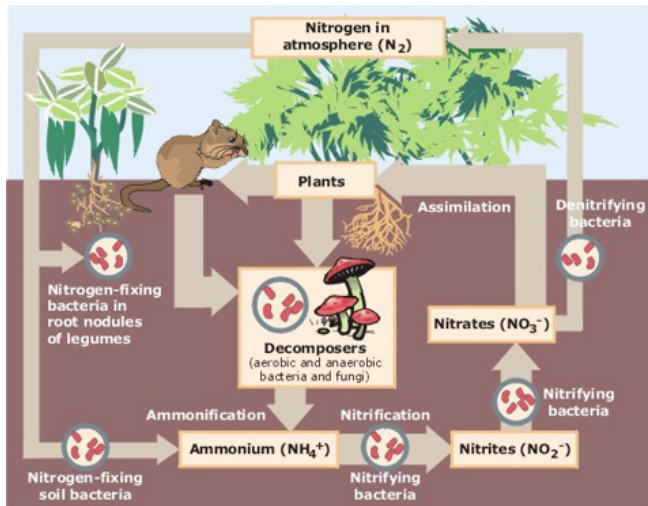
食物網



Relationships between soil food web, plants, organic matter, and birds and mammals
 Image courtesy of USDA Natural Resources Conservation Service
http://soils.usda.gov/sqi/soil_quality/soil_biology/soil_food_web.html

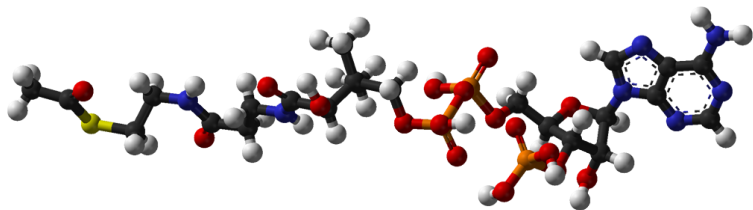
http://en.wikipedia.org/wiki/File:Soil_food_webUSDA.jpg

窒素循環



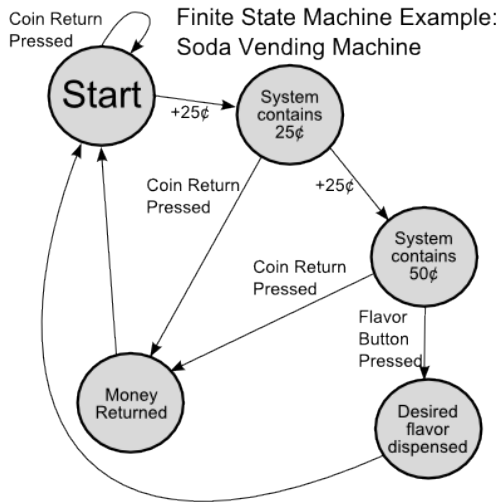
http://en.wikipedia.org/wiki/File:Nitrogen_Cycle.jpg

分子模型



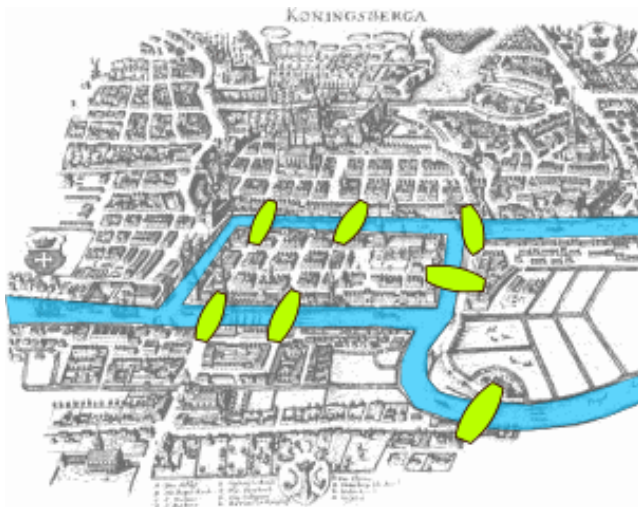
<https://en.wikipedia.org/wiki/Acetyl-CoA>

状態遷移図



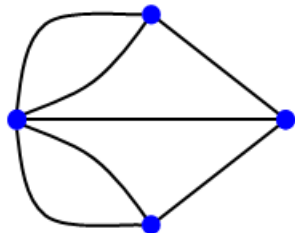
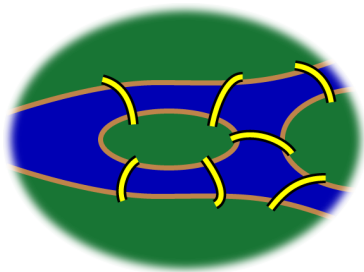
<http://automatown.org/automata>

ケーニヒスベルクの橋の問題 (オイラー, 1735 年)



http://en.wikipedia.org/wiki/File:Königsberg_bridges.png

ケーニヒスベルクの橋の問題：続き



http://en.wikipedia.org/wiki/Seven_Bridges_of_Königsberg

これらの例に共通すること

間違った認識

現実世界にはたくさんネットワークが存在する

正しい認識

現実世界にはたくさんネットワークと見なせることが存在する

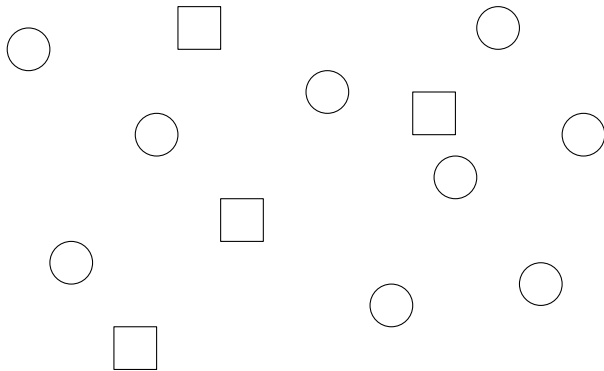
- 「ネットワーク」としてモデル化
- 数学的には「グラフ」として定義

その他の例は今後の講義の中で

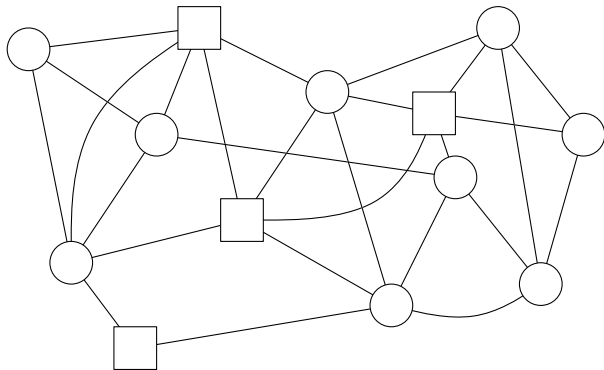
目次

- ① ネットワークの展覧会
- ② **グラフの定義**
- ③ グラフの用語
- ④ 今日のまとめと今後の予告

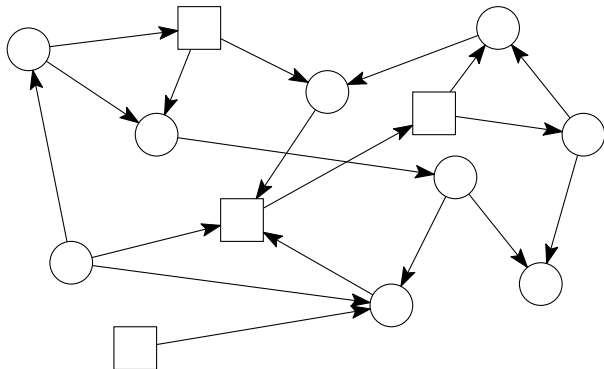
グラフの構成要素：頂点（節点ともいう）



グラフの構成要素：辺 (枝ともいう) — 向きがない場合



グラフの構成要素：辺 (枝ともいう) — 向きがある場合



グラフの数学的な定義 — 向きがない場合

「無向グラフ $G = (V, E)$ 」とは？

- 意味：グラフ G は集合 V と E の組

V は G の頂点集合

- V の要素は G の頂点

E は G の辺集合

- E の要素は G の辺で、 G の頂点を 2 つ集めた集合

例

グラフ $G = (V, E)$

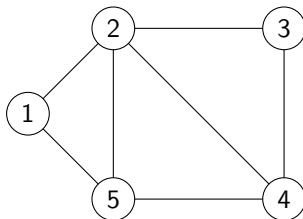
- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$

グラフの数学的な定義 — 向きがない場合：図示

例

グラフ $G = (V, E)$

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$



グラフの数学的な定義 — 向きがある場合

「有向グラフ $G = (V, E)$ 」とは？

- 意味：グラフ G は集合 V と E の組

V は G の頂点集合

- V の要素は G の頂点

E は G の辺集合

- E の要素は G の辺で、 G の頂点を 2 つ並べた組の集合

例

グラフ $G = (V, E)$

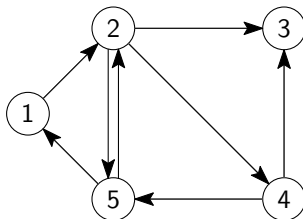
- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $E = \{(1, 2), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (4, 5)\}$

グラフの数学的な定義 — 向きがある場合：図示

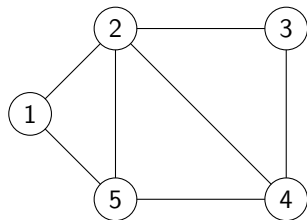
例

グラフ $G = (V, E)$

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $E = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 3), (4, 5), (5, 1), (5, 2)\}$

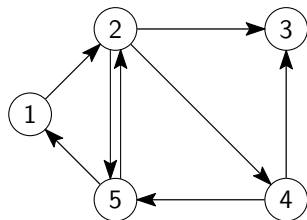


隣接性と接続性：無向グラフ



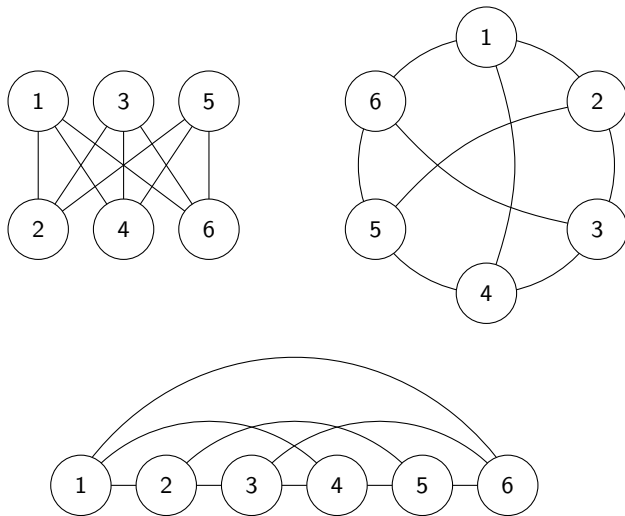
- 頂点 1 と頂点 5 は隣接している
- 頂点 1 と頂点 3 は隣接していない
- 頂点 2 は辺 $\{1, 2\}$ に接続している
- 辺 $\{1, 2\}$ は頂点 2 に接続している
- 頂点 5 は辺 $\{3, 4\}$ に接続していない
- 頂点 3 は辺 $\{2, 3\}$ の端点である
- 頂点 4 は辺 $\{2, 3\}$ の端点ではない

隣接性と接続性：有向グラフ

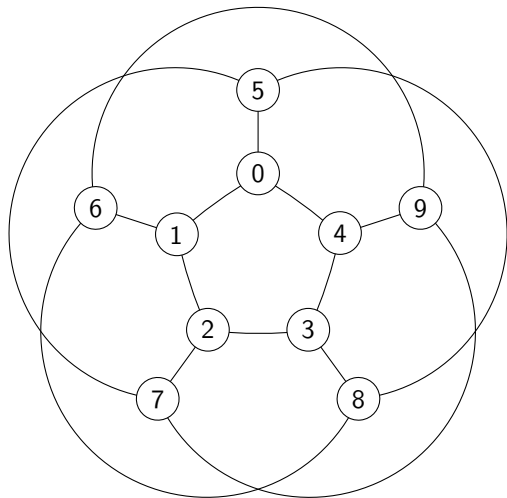
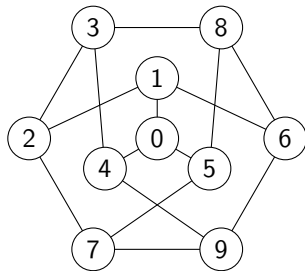
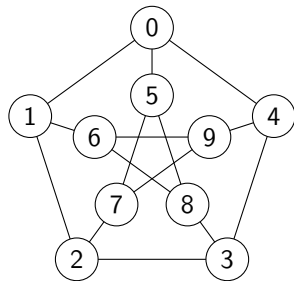


- 頂点 1 と頂点 5 は隣接している
- 頂点 1 と頂点 3 は隣接していない
- 頂点 2 は辺 $(1, 2)$ に接続している
- 辺 $(1, 2)$ は頂点 2 に接続している
- 頂点 5 は辺 $(1, 2)$ に接続していない
- 頂点 3 は辺 $(2, 3)$ の終点である
- 頂点 2 は辺 $(2, 3)$ の始点である
- 頂点 3 は辺 $(2, 3)$ の始点ではない

同じグラフの異なる描き方 (1)



同じグラフの異なる描き方 (2)



振り返ってみる

はじめに見た例において，次が何であるか確認してみる

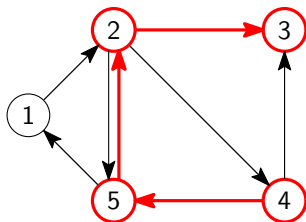
- 考えているグラフは有向グラフか？ 無向グラフか？
- グラフの頂点は，現実世界の何に対応しているか？
- グラフの辺は，現実世界の何に対応しているか？

目次

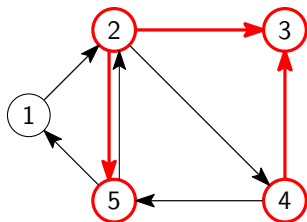
- ① ネットワークの展覧会
- ② グラフの定義
- ③ グラフの用語**
- ④ 今日のまとめと今後の予告

グラフにおける道 (路, path) — 有向グラフの場合

道 (または, 路) とは, 頂点と辺を一続きに選んだ系列



道である



道ではない

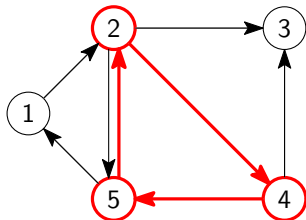
- 系列として書く : 4, (4, 5), 5, (5, 2), 2, (2, 3), 3
- 道の始点と終点 : 始点は頂点 4, 終点は頂点 3
- 道の長さ (辺の数) : 3

同じ頂点や辺が繰り返し現れてもよいものとする

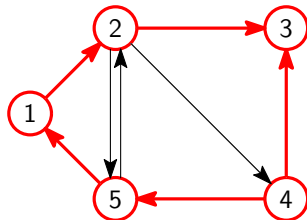
(よいとしない流儀もある)

グラフにおける閉路 (cycle) — 有向グラフの場合

閉路とは、頂点と辺を一続きに選んで、はじめに戻ってくる系列



閉路である



閉路ではない

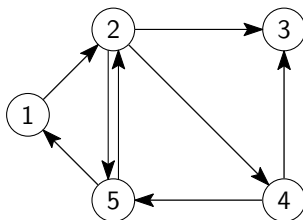
- 系列として書く : 2, (2, 4), 4, (4, 5), 5, (5, 2), 2
- 閉路の長さ (辺の数) : 3

同じ頂点や辺が繰り返し現れてもよいものとする

(よいとしない流儀もある)

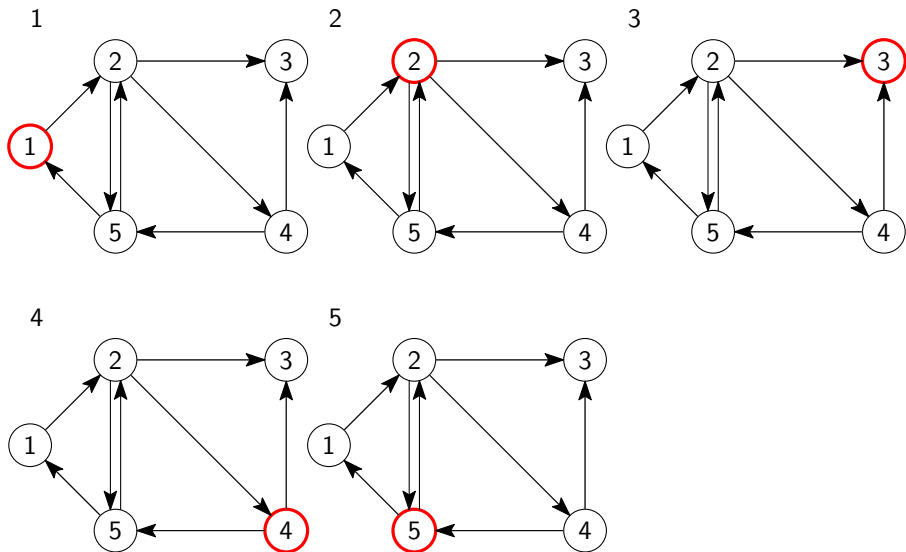
例題

このグラフにはいくつ道があるか？

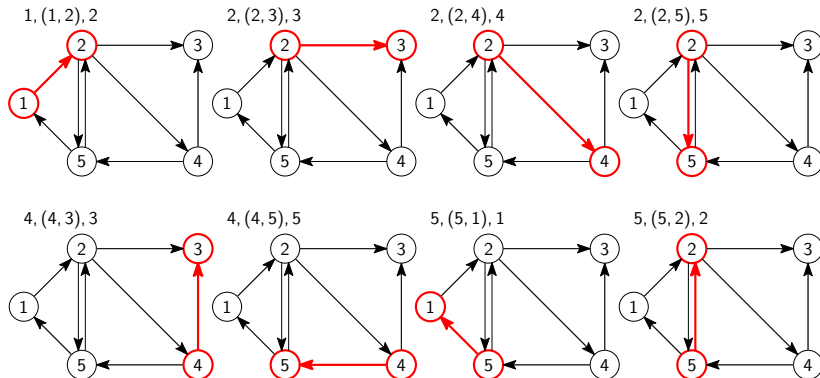


長さ 0 の道 , 1 の道 , 2 の道 , 3 の道だけ考えてみる

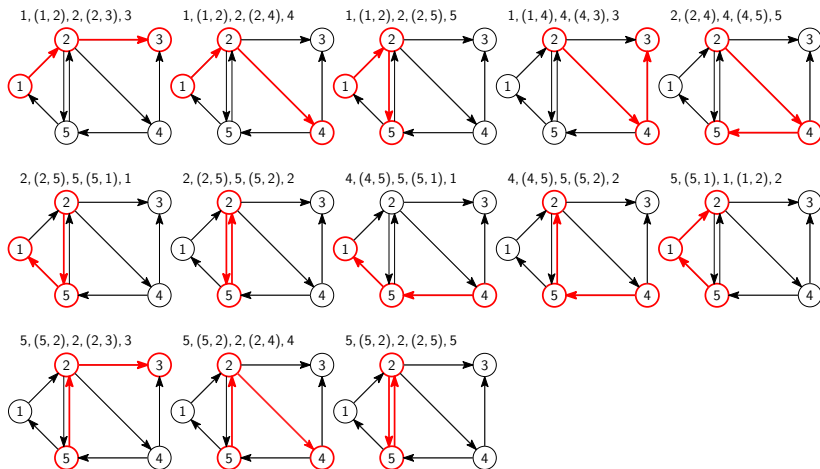
例題：長さ 0 の道



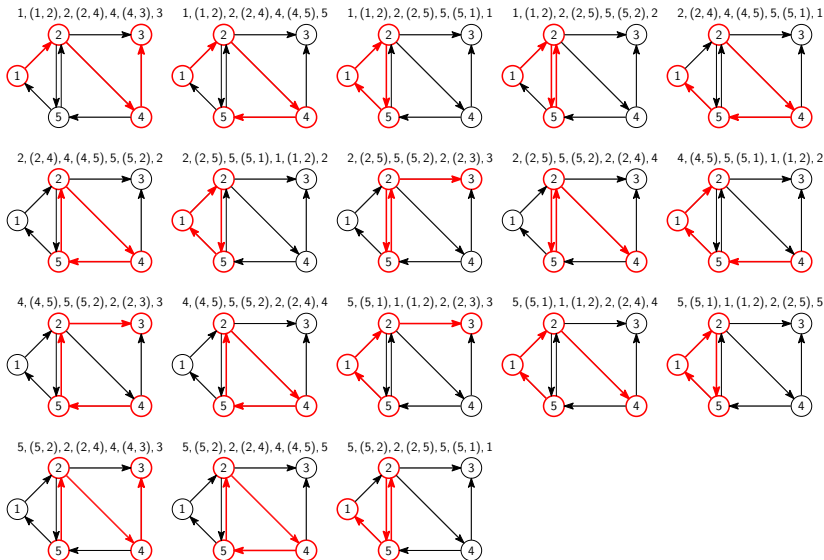
例題：長さ 1 の道



例題：長さ 2 の道



例題：長さ 3 の道



目次

- ① ネットワークの展覧会
- ② グラフの定義
- ③ グラフの用語
- ④ 今日のまとめと今後の予告

今日のまとめと今後の予告

今日のまとめ：今日の目標

- グラフに関する用語を理解して，正しく使えるようになる

今後の予告：ネットワークに関わる 3 つの最適化問題

- 最短路問題
- 最大流問題
- 最小費用流問題

注：ネットワークに関わる最適化問題は他にもたくさんある

来週 5 月 21 日は中間テスト 1（今日の部分は出題範囲に含まれません）

目次

- ① ネットワークの展覧会
- ② グラフの定義
- ③ グラフの用語
- ④ 今日のまとめと今後の予告