

最適化手法 第4回

整数計画法 (4)

— 分枝限定法 —

後藤 順哉

中央大学 理工学部 経営システム工学科

2014 年 4 月 30 日

今日の概要

今日の目標

- 分枝限定法の原理を理解する
- 分枝限定法を用いて整数計画問題が解けるようになる

ことわり

本講義で用いる資料は、電気通信大学 岡本吉央先生が 2013 年度前期「最適化手法」で用いた資料を、後藤が適宜変更して用いています。

今日考えたい問題 (準備 & 復習) : ナップサック問題を解く

ナップサック問題

$$\begin{array}{ll}
 \text{最大化} & 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \\
 \text{条件} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 4, \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}
 \end{array}$$

商品	1	2	3	4
収入 [万円]	3	4	1	2
重さ [kg]	2	3	1	3

ナップサックの重量制限 : 4 [kg]

今日考えたい問題 (準備 & 復習) : 貪欲法

次の**貪欲法**で「よさそう」な許容解を作ってみる

アルゴリズム：貪欲法

- 効率の大きな順にナップサックに商品を詰む
- しかし、重量制限を満たせないときは詰まない

商品	1	2	3	4
収入 [万円]	3	4	1	2
重さ [kg]	2	3	1	3
効率 [万円/kg]	3/2	4/3	1	2/3

ナップサックの重量制限：4 [kg]

この場合、商品 1 と 3 を詰んで終了 $\rightsquigarrow$ 目的関数値 = 4

今日考えたい問題 (準備 & 復習) : 線形計画緩和

線形計画緩和

$$\text{最大化} \quad 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4$$

$$\begin{aligned} \text{条件} \quad & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 4, \\ & 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1, 0 \leq x_3 \leq 1, 0 \leq x_4 \leq 1, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

実際解いてみると、線形計画緩和の最適解は

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 2/3, 0, 0)$$

で、線形計画緩和の最適値は $17/3$

今日考えたい問題 (準備 & 復習) : 線形計画緩和

線形計画緩和の最適解は

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 2/3, 0, 0)$$

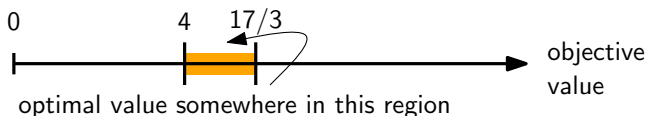
で、線形計画緩和の最適値は $17/3$

線形計画緩和の重要な性質 1 (最大化問題のとき)

$$\boxed{\text{0-1 整数計画問題の最適値}} \leq \boxed{\text{その線形計画緩和の最適値}}$$

よって、

$$\boxed{\text{ナップサック問題の最適値}} \leq 17/3$$



目次

- ① 分枝操作
- ② 分枝限定法
- ③ 今日のまとめと今後の予告

ナップサック問題を解く

ナップサック問題 $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \\ \text{条件} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 4, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

重要な性質 (当たり前だけど)

(x_1, x_2, x_3, x_4) が最適解であるとき, 次のどちらかが成り立つ

- $x_1 = 0$
- $x_1 = 1$

行いたいこと

場合分け

(一般的な問題解決の手法のひとつ)

問題の分割

ナップサック問題 $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \\ \text{条件} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 4, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

 $x_1 = 0$ とした問題 $P(0, x_2, x_3, x_4)$

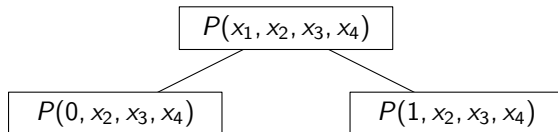
$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 4x_2 + x_3 + 2x_4 \\ \text{条件} & 3x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 4, \\ & x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

 $x_1 = 1$ とした問題 $P(1, x_2, x_3, x_4)$

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 3 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \\ \text{条件} & 3x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 2, \\ & x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P(0, x_2, x_3, x_4) \text{ の最適解} \\ P(1, x_2, x_3, x_4) \text{ の最適解} \end{array} \right\} \text{ のよい方 } = P(x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ の最適解}$$

問題の分割：図示



さらに問題の分割

ナップサック問題 $P(0, x_2, x_3, x_4)$

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 4x_2 + x_3 + 2x_4 \\ \text{条件} & 3x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 4, \\ & x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

 $x_1 = 0, x_2 = 0$ とした問題 $P(0, 0, x_3, x_4)$

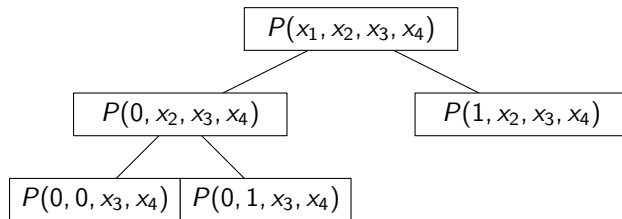
$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & x_3 + 2x_4 \\ \text{条件} & x_3 + 3x_4 \leq 4, \\ & x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

 $x_1 = 0, x_2 = 1$ とした問題 $P(0, 1, x_3, x_4)$

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 4 + x_3 + 2x_4 \\ \text{条件} & x_3 + 3x_4 \leq 1, \\ & x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

$\left\{ \begin{array}{l} P(0, 0, x_3, x_4) \text{ の最適解} \\ P(0, 1, x_3, x_4) \text{ の最適解} \end{array} \right\}$ のよい方 $= P(0, x_2, x_3, x_4)$ の最適解

さらに問題の分割：図示



さらに問題の分割 (2)

ナップサック問題 $P(1, x_2, x_3, x_4)$

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 3 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \\ \text{条件} & 3x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 2, \\ & x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

 $x_1 = 1, x_2 = 0$ とした問題 $P(1, 0, x_3, x_4)$

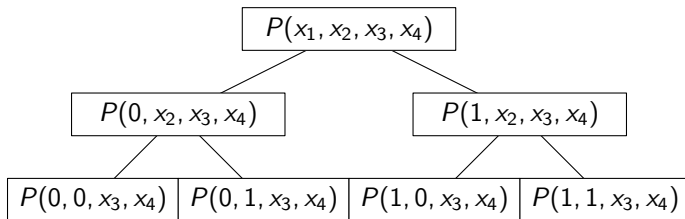
$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 3 + x_3 + 2x_4 \\ \text{条件} & x_3 + 3x_4 \leq 2, \\ & x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

 $x_1 = 1, x_2 = 1$ とした問題 $P(1, 1, x_3, x_4)$

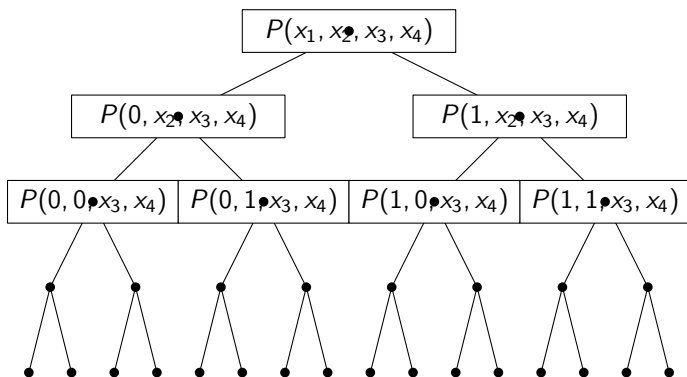
$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 7 + x_3 + 2x_4 \\ \text{条件} & x_3 + 3x_4 \leq -1, \\ & x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

$\left\{ \begin{array}{l} P(1, 0, x_3, x_4) \text{ の最適解} \\ P(1, 1, x_3, x_4) \text{ の最適解} \end{array} \right\}$ のよい方 $= P(1, x_2, x_3, x_4)$ の最適解

さらに問題の分割 (2) : 図示

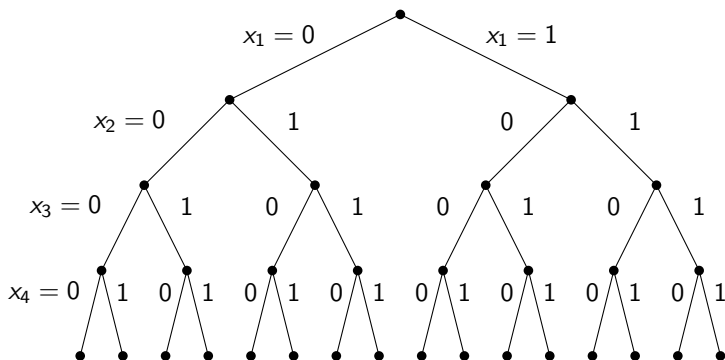


さらに問題の分割 (3) : 図示



分枝木と呼ばれている

さらに問題の分割 (4) : 図示



分枝木と呼ばれている

分割によって得られた問題 (1)

ナップサック問題 $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$

$$\begin{array}{ll}
 \text{最大化} & 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \\
 \text{条件} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 4, \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}
 \end{array}$$

分割で得られた
 $P(0, 0, 0, 0)$

$$\begin{array}{ll}
 \text{最大化} & 0 \\
 \text{条件} & 0 \leq 4
 \end{array}$$

最適値は 0

分割で得られた
 $P(0, 0, 0, 1)$

$$\begin{array}{ll}
 \text{最大化} & 2 \\
 \text{条件} & 3 \leq 4
 \end{array}$$

最適値は 2

分割で得られた
 $P(0, 0, 1, 0)$

$$\begin{array}{ll}
 \text{最大化} & 1 \\
 \text{条件} & 1 \leq 4
 \end{array}$$

最適値は 1

分割で得られた
 $P(0, 0, 1, 1)$

$$\begin{array}{ll}
 \text{最大化} & 3 \\
 \text{条件} & 4 \leq 4
 \end{array}$$

最適値は 3

分割によって得られた問題 (2)

ナップサック問題 $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$

$$\begin{array}{ll}
 \text{最大化} & 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \\
 \text{条件} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 4, \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}
 \end{array}$$

分割で得られた
 $P(0, 1, 0, 0)$

$$\begin{array}{ll}
 \text{最大化} & 4 \\
 \text{条件} & 3 \leq 4
 \end{array}$$

最適値は 4

分割で得られた
 $P(0, 1, 0, 1)$

$$\begin{array}{ll}
 \text{最大化} & 6 \\
 \text{条件} & 6 \leq 4
 \end{array}$$

これは非許容

分割で得られた
 $P(0, 1, 1, 0)$

$$\begin{array}{ll}
 \text{最大化} & 5 \\
 \text{条件} & 4 \leq 4
 \end{array}$$

最適値は 5

分割で得られた
 $P(0, 1, 1, 1)$

$$\begin{array}{ll}
 \text{最大化} & 7 \\
 \text{条件} & 7 \leq 4
 \end{array}$$

これは非許容

分割によって得られた問題 (3)

ナップサック問題 $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$

$$\begin{array}{ll}
 \text{最大化} & 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \\
 \text{条件} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 4, \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}
 \end{array}$$

分割で得られた
 $P(1, 0, 0, 0)$

$$\begin{array}{ll}
 \text{最大化} & 3 \\
 \text{条件} & 2 \leq 4
 \end{array}$$

最適値は 3

分割で得られた
 $P(1, 0, 0, 1)$

$$\begin{array}{ll}
 \text{最大化} & 5 \\
 \text{条件} & 5 \leq 4
 \end{array}$$

これは非許容

分割で得られた
 $P(1, 0, 1, 0)$

$$\begin{array}{ll}
 \text{最大化} & 4 \\
 \text{条件} & 3 \leq 4
 \end{array}$$

最適値は 4

分割で得られた
 $P(1, 0, 1, 1)$

$$\begin{array}{ll}
 \text{最大化} & 6 \\
 \text{条件} & 6 \leq 4
 \end{array}$$

これは非許容

分割によって得られた問題 (4)

ナップサック問題 $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$

$$\begin{array}{ll}
 \text{最大化} & 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \\
 \text{条件} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 4, \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}
 \end{array}$$

分割で得られた
 $P(1, 1, 0, 0)$

$$\begin{array}{ll}
 \text{最大化} & 7 \\
 \text{条件} & 5 \leq 4
 \end{array}$$

これは非許容

分割で得られた
 $P(1, 1, 0, 1)$

$$\begin{array}{ll}
 \text{最大化} & 9 \\
 \text{条件} & 8 \leq 4
 \end{array}$$

これは非許容

分割で得られた
 $P(1, 1, 1, 0)$

$$\begin{array}{ll}
 \text{最大化} & 8 \\
 \text{条件} & 6 \leq 4
 \end{array}$$

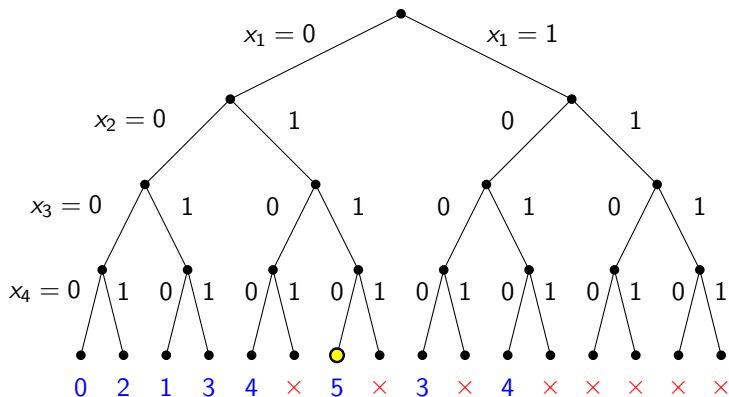
これは非許容

分割で得られた
 $P(1, 1, 1, 1)$

$$\begin{array}{ll}
 \text{最大化} & 10 \\
 \text{条件} & 9 \leq 4
 \end{array}$$

これは非許容

分割から得られる最適値と最適解



「 $\times$ 」は非許容の場合を表す

解いた結果

最適解は $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 1, 1, 0)$ で、最適値は 5

今から考えたいこと

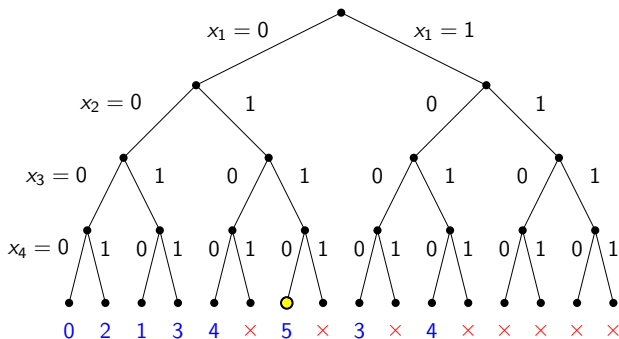
問題点

この分枝木は、膨大な場合分けを行っている

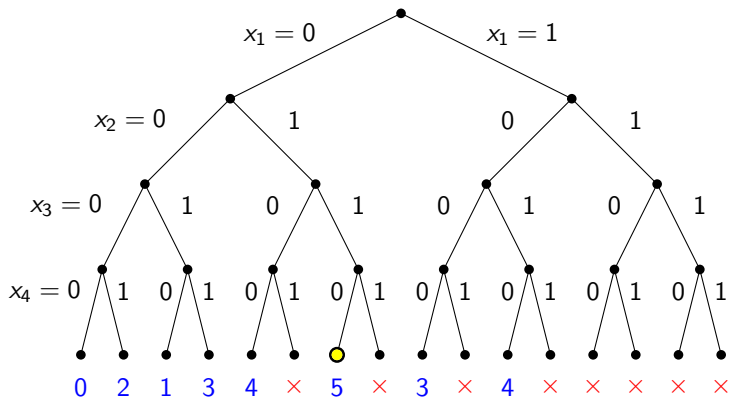
今から考えたいこと (工夫点)

あまり場合分けをしなくてもよいように分枝木を作っていく

⇒ 限定操作 (枝刈り)



限定操作：例



- $x_1 = 1, x_2 = 1$ とした問題はどれも非許容になっている
- つまり, $P(1, 1, x_3, x_4)$ は非許容であった
- 「 $P(1, 1, x_3, x_4)$ が非許容である」ということが判断できるか？

限定操作：例 (続)

ナップサック問題 $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \\ \text{条件} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 4, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

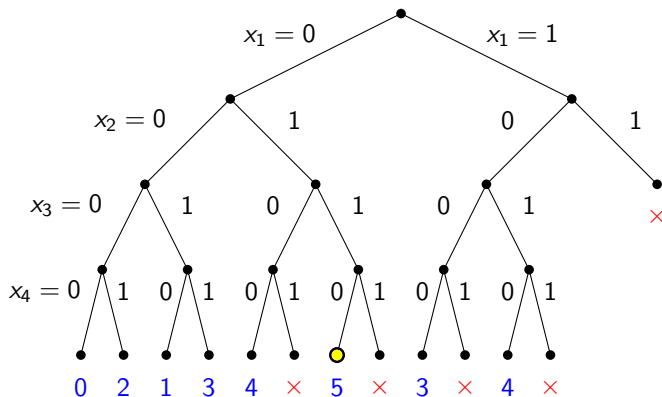
分割で得られた $P(1, 1, x_3, x_4)$

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 7 + x_3 + 2x_4 \\ \text{条件} & x_3 + 3x_4 \leq -1, \\ & x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

- 制約式「 $x_3 + 3x_4 \leq -1$ 」を試みる
- 左辺 ≥ 0 なのに、右辺 $= -1$ なので、これは非許容

$\leadsto$ 「 $P(1, 1, x_3, x_4)$ が非許容である」と判断できた

限定操作による分枝木の変化



分枝限定法は、これを統一的かつ効果的に行う

目次

- ① 分枝操作
- ② 分枝限定法
- ③ 今日のまとめと今後の予告

分枝限定法

分枝限定法とは？

以下の 2 つを基本操作として、問題解決を行う

- **分枝操作**：解くべき問題を分割する（場合分け）
- **限定操作**：解かない問題を無視する（枝刈り）

線形計画緩和に基づいた 0-1 整数計画問題に対する分枝限定法

- **分枝操作**：1 つの変数に 0 か 1 を割り当てて、問題を分割する
- **限定操作**：**暫定解**と**線形計画緩和**に基づいて、うまく行う

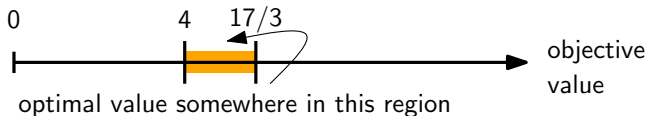
分枝限定法でナップサック問題を解く (1)

ナップサック問題 $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$

最大化	$3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4$
条件	$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 4,$ $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}$

- 貪欲法で得られた許容解 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 1, 0)$
 …これを**暫定解**とする
- 線形計画緩和の最適解 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 2/3, 0, 0)$
- 貪欲法と線形計画緩和より,

$$4 \leq \boxed{P(x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ の最適値}} \leq 17/3$$



分枝限定法でナップサック問題を解く (2)

分枝を行う変数の選択

線形計画緩和の最適解で 0, 1 以外の値が割り当てられた変数を分割に使うとよい

ナップサック問題 $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \\ \text{条件} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 4, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

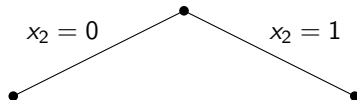
分割で得られた $P(x_1, 0, x_3, x_4)$

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 3x_1 + x_3 + 2x_4 \\ \text{条件} & 2x_1 + x_3 + 3x_4 \leq 4, \\ & x_1, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

分割で得られた $P(x_1, 1, x_3, x_4)$

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 4 + 3x_1 + x_3 + 2x_4 \\ \text{条件} & 2x_1 + x_3 + 3x_4 \leq 1, \\ & x_1, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

分枝木



$$4 \leq \boxed{P(x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ の最適値}} \leq 17/3$$

分枝限定法でナップサック問題を解く (3)

 $P(x_1, 0, x_3, x_4)$ — これもナップサック問題

$$\begin{array}{ll}
 \text{最大化} & 3x_1 + x_3 + 2x_4 \\
 \text{条件} & 2x_1 + x_3 + 3x_4 \leq 4, \\
 & x_1, x_3, x_4 \in \{0, 1\}
 \end{array}$$

 $P(x_1, 0, x_3, x_4)$ の線形計画緩和

$$\begin{array}{ll}
 \text{最大化} & 3x_1 + x_3 + 2x_4 \\
 \text{条件} & 2x_1 + x_3 + 3x_4 \leq 4, \\
 & 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_3 \leq 1, 0 \leq x_4 \leq 1
 \end{array}$$

- 線形計画緩和の最適解 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 1, 1/3)$, 最適値 $= 14/3$

分枝限定法でナップサック問題を解く (4)

 $P(x_1, 0, x_3, x_4)$

$$\begin{array}{ll}
 \text{最大化} & 3x_1 + x_3 + 2x_4 \\
 \text{条件} & 2x_1 + x_3 + 3x_4 \leq 4, \\
 & x_1, x_3, x_4 \in \{0, 1\}
 \end{array}$$

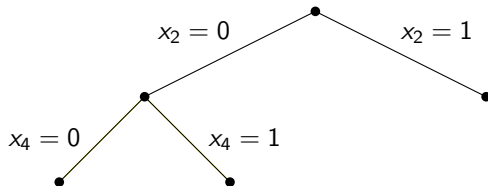
分割で得られた $P(x_1, 0, x_3, 0)$

$$\begin{array}{ll}
 \text{最大化} & 3x_1 + x_3 \\
 \text{条件} & 2x_1 + x_3 \leq 4, \\
 & x_1, x_3 \in \{0, 1\}
 \end{array}$$

分割で得られた $P(x_1, 0, x_3, 1)$

$$\begin{array}{ll}
 \text{最大化} & 2 + 3x_1 + x_3 \\
 \text{条件} & 2x_1 + x_3 \leq 1, \\
 & x_1, x_3 \in \{0, 1\}
 \end{array}$$

分枝木



$$4 \leq \boxed{P(x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ の最適値}} \leq 17/3$$

分枝限定法でナップサック問題を解く (5)

ナップサック問題 $P(x_1, 0, x_3, 0)$

$$\begin{array}{ll}
 \text{最大化} & 3x_1 + x_3 \\
 \text{条件} & 2x_1 + x_3 \leq 4, \\
 & x_1, x_3 \in \{0, 1\}
 \end{array}$$

 $P(x_1, 0, x_3, 0)$ の線形計画緩和

$$\begin{array}{ll}
 \text{最大化} & 3x_1 + x_3 \\
 \text{条件} & 2x_1 + x_3 \leq 4, \\
 & 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_3 \leq 1
 \end{array}$$

- 線形計画緩和の最適解 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 1, 0)$, 最適値 = 4

分枝限定法でナップサック問題を解く (6)

ナップサック問題 $P(x_1, 0, x_3, 0)$

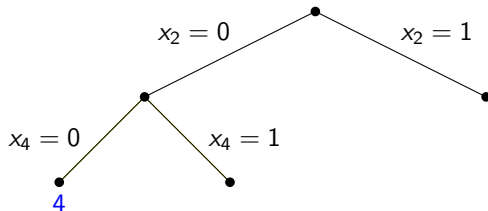
$$\begin{array}{ll}
 \text{最大化} & 3x_1 + x_3 \\
 \text{条件} & 2x_1 + x_3 \leq 4, \\
 & x_1, x_3 \in \{0, 1\}
 \end{array}$$

- 線形計画緩和の最適解 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 1, 0)$, 最適値 = 4
- これは $P(x_1, 0, x_3, 0)$ の許容解なので, $P(x_1, 0, x_3, 0)$ の最適解
- $\therefore P(x_1, 0, x_3, 0)$ に対して, これ以上分枝操作を行う必要なし

線形計画緩和の重要な性質 2 (再掲)

線形計画緩和の最適解 x が 0-1 整数計画問題の許容解 $\Rightarrow$
 x は 0-1 整数計画問題の最適解

分枝木



$$4 \leq \boxed{P(x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ の最適値}} \leq 17/3$$

分枝限定法でナップサック問題を解く (7)

ナップサック問題 $P(x_1, 0, x_3, 1)$

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 2 + 3x_1 + x_3 \\ \text{条件} & 2x_1 + x_3 \leq 1, \\ & x_1, x_3 \in \{0, 1\} \end{array}$$

 $P(x_1, 0, x_3, 1)$ の線形計画緩和

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 2 + 3x_1 + x_3 \\ \text{条件} & 2x_1 + x_3 \leq 1, \\ & 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_3 \leq 1 \end{array}$$

- 線形計画緩和の最適解 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1/2, 0, 0, 1)$, 最適値 $= 7/2$

分枝限定法でナップサック問題を解く (8)

したがって、次が成り立つ

$P(x_1, 0, x_3, 1)$ の最適値

$\leq$ $P(x_1, 0, x_3, 1)$ の線形計画緩和の最適値

$= 7/2$

< 4

$\leq$ $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$ の最適値

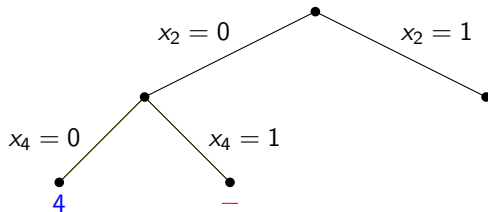
つまり、 $P(x_1, 0, x_3, 1)$ から $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$ の最適解は得られない

- これ以上、場合分けをせずに、無視できる (枝刈り)

線形計画緩和の重要な性質 1 (最大化問題の場合) (再掲)

0-1 整数計画問題の最適値 $\leq$ その線形計画緩和の最適値

分枝木



「 $-$ 」で、そこに $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$ の最適解がないことを表した

$$4 \leq \boxed{P(x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ の最適値}} \leq 17/3$$

分枝限定法でナップサック問題を解く (9)

ナップサック問題 $P(x_1, 1, x_3, x_4)$

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 4 + 3x_1 + x_3 + 2x_4 \\ \text{条件} & 2x_1 + x_3 + 3x_4 \leq 1, \\ & x_1, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

 $P(x_1, 1, x_3, x_4)$ の線形計画緩和

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 4 + 3x_1 + x_3 + 2x_4 \\ \text{条件} & 2x_1 + x_3 + 3x_4 \leq 1, \\ & 0 \leq x_2 \leq 1, 0 \leq x_3 \leq 1, 0 \leq x_4 \leq 1 \end{array}$$

- 線形計画緩和の最適解 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1/2, 1, 0, 0)$, 最適値 $= 11/2$
- これは 0-1 解でもないし, 値が 4 より小さいわけでもない $\leadsto$ 分枝

分枝限定法でナップサック問題を解く (10)

ナップサック問題 $P(x_1, 1, x_3, x_4)$

$$\begin{array}{ll}
 \text{最大化} & 4 + 3x_1 + x_3 + 2x_4 \\
 \text{条件} & 2x_1 + x_3 + 3x_4 \leq 1, \\
 & x_1, x_3, x_4 \in \{0, 1\}
 \end{array}$$

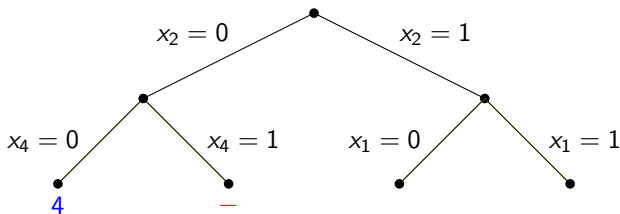
分割で得られた $P(0, 1, x_3, x_4)$

$$\begin{array}{ll}
 \text{最大化} & 4 + x_3 + 2x_4 \\
 \text{条件} & x_3 + 3x_4 \leq 1, \\
 & x_3, x_4 \in \{0, 1\}
 \end{array}$$

分割で得られた $P(1, 1, x_3, x_4)$

$$\begin{array}{ll}
 \text{最大化} & 7 + x_3 + 2x_4 \\
 \text{条件} & x_3 + 3x_4 \leq -1, \\
 & x_3, x_4 \in \{0, 1\}
 \end{array}$$

分枝木



$$4 \leq \boxed{P(x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ の最適値}} \leq 17/3$$

注意：2 段目で分枝を行っている変数が左と右で異なる

分枝限定法でナップサック問題を解く (11)

ナップサック問題 $P(0, 1, x_3, x_4)$

$$\begin{array}{ll}
 \text{最大化} & 4 + x_3 + 2x_4 \\
 \text{条件} & x_3 + 3x_4 \leq 1, \\
 & x_3, x_4 \in \{0, 1\}
 \end{array}$$

 $P(0, 1, x_3, x_4)$ の線形計画緩和

$$\begin{array}{ll}
 \text{最大化} & 4 + x_3 + 2x_4 \\
 \text{条件} & x_3 + 3x_4 \leq 1, \\
 & 0 \leq x_3 \leq 1, 0 \leq x_4 \leq 1
 \end{array}$$

- 線形計画緩和の最適解 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 1, 1, 0)$, 最適値 = 5

分枝限定法でナップサック問題を解く (12)

ナップサック問題 $P(0, 1, x_3, x_4)$

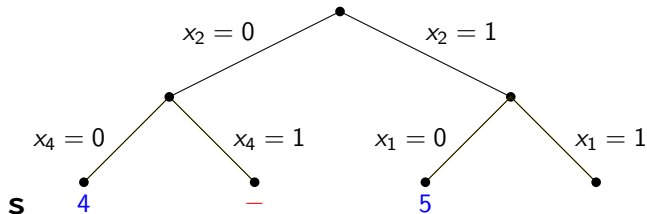
$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 4 + x_3 + 2x_4 \\ \text{条件} & x_3 + 3x_4 \leq 1, \\ & x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

- 線形計画緩和の最適解 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 1, 1, 0)$, 最適値 = 5
- これは $P(0, 1, x_3, x_4)$ の許容解なので, $P(0, 1, x_3, x_4)$ の最適解
- $\therefore P(0, 1, x_3, x_4)$ に対して, これ以上分枝操作を行う必要なし
- しかも, 暫定解よりも目的関数値がよい許容解が見つかった!
- $\rightsquigarrow$ 暫定解の更新

線形計画緩和の重要な性質 2 (再掲)

線形計画緩和の最適解 x が 0-1 整数計画問題の許容解 $\Rightarrow$
 x は 0-1 整数計画問題の最適解

分枝木



$$5 \leq \boxed{P(x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ の最適値}} \leq 17/3$$

分枝限定法でナップサック問題を解く (13)

ナップサック問題 $P(1, 1, x_3, x_4)$

$$\begin{array}{ll}
 \text{最大化} & 7 + x_3 + 2x_4 \\
 \text{条件} & x_3 + 3x_4 \leq -1, \\
 & x_3, x_4 \in \{0, 1\}
 \end{array}$$

 $P(1, 1, x_3, x_4)$ の線形計画緩和

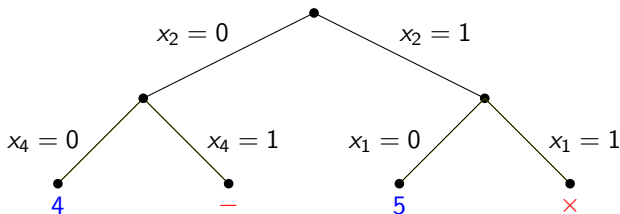
$$\begin{array}{ll}
 \text{最大化} & 7 + x_3 + 2x_4 \\
 \text{条件} & x_3 + 3x_4 \leq -1, \\
 & 0 \leq x_3 \leq 1, 0 \leq x_4 \leq 1
 \end{array}$$

- この線形計画緩和は**非許容**
- よって、 $P(1, 1, x_3, x_4)$ も**非許容**

線形計画緩和の重要な性質 3 (初登場)

線形計画緩和が非許容 $\Rightarrow$ もとの 0-1 整数計画問題も非許容

分枝木



$$5 \leq \boxed{P(x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ の最適値}} \leq 17/3$$

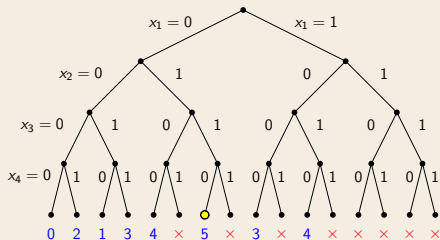
「X」は非許容の場合を表す

分枝操作がすべて終了

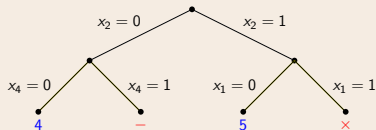
最適解は $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 1, 1, 0)$ で、最適値は 5

分枝木の比較

分枝操作のみ



分枝操作+限定操作



限定操作によって、分枝木が圧倒的に小さくなった $\rightsquigarrow$ 効率性

分枝限定法：どう動かすか？

分枝限定法の流れ

- 限定操作：まず線形計画緩和を解く
 - × それが非許容の場合 $\rightsquigarrow$ 分枝は停止
 - その最適値が暫定解の目的関数値より小さい $\rightsquigarrow$ 分枝は停止
 - それが 0-1 最適解を持つ $\rightsquigarrow$ 分枝は停止 (そして、**暫定解の更新**)
 - それ以外 $\rightsquigarrow$ 分枝操作に進む
- 分枝操作：ある変数に着目して、それが 0 の場合と 1 の場合に分ける

補足

実際の分枝限定法では、次の事項をどう決定するかも重要である

- どの変数に着目して分枝操作を行うか
- 分割でできたどの問題を解くか

目次

① 分枝操作

② 分枝限定法

③ 今日のまとめと今後の予告

今日のまとめ

今日の目標

- 分枝限定法の原理を理解する
- 分枝限定法を用いて整数計画問題が解けるようになる

そのときに、線形計画緩和を有効に用いた

線形計画緩和の重要な性質 1 (最大化問題のとき)

$$\boxed{0-1 \text{ 整数計画問題の最適値}} \leq \boxed{\text{その線形計画緩和の最適値}}$$

線形計画緩和の重要な性質 2

線形計画緩和の最適解 x が 0-1 整数計画問題の許容解 $\Rightarrow$
 x は 0-1 整数計画問題の最適解

線形計画緩和の重要な性質 3

線形計画緩和が非許容 $\Rightarrow$ もとの 0-1 整数計画問題も非許容

今後の予告

整数計画法

- 済 どのような問題をモデル化できるのか？ (モデリング)
- どのように解くのか？ (アルゴリズム)
- そのときに、線形計画法をどのように使うのか？
- 済 緩和 (基礎)
- 済 分枝限定法
- 切除平面法

目次

- ① 分枝操作
- ② 分枝限定法
- ③ 今日のまとめと今後の予告