最適化手法 第 2 回

整数計画法 (2)

— 整数計画法によるモデリング —

後藤 順哉

中央大学 理工学部 経営システム工学科

2014 年 4 月 16 日

今日の概要

今日の目標

- 整数計画法を用いて様々な問題をモデル化できるようになる
- 整数変数，0-1 変数の使い方の典型例を理解する

$$\text{モデル化} = \text{モデリング} = \text{定式化}$$

ことわり

本講義で用いる資料は，電気通信大学 岡本吉央先生が 2013 年度前期「最適化手法」で用いた資料を，後藤が適宜変更して用いています．

〈復習〉整数計画問題

整数計画問題 (integer program) **とは次のような数理計画問題**

$$
\begin{array}{ll}
\textbf{最小化} & -2x_1 + x_2 \\
\underset{x_1,x_2}{} & \\
\textbf{条　件} & -2x_1 - 3x_2 \geq -6, \\
 & x_1 - 2x_2 \geq -2, \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\
 & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}
\end{array}
$$

- **変数は整数値を取る**
- **目的関数は線形関数**
- **制約は線形式 (等式，または，等号付きの不等式)**

整数計画法 (integer programming) とは？

- **整数計画問題を用いた数理モデル化による問題解決**
- **それに関する研究分野**

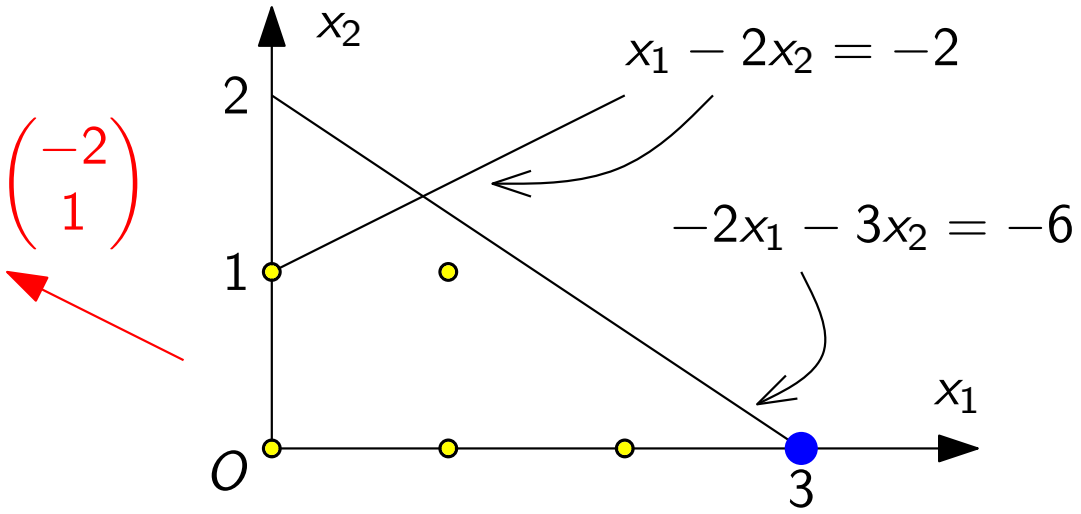
目的関数，制約が線形でないものも，整数計画問題と呼ぶことがある

〈復習〉整数計画問題：図を描いて解く

この整数計画問題を解く

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化}_{x_1,x_2} & -2x_1 + x_2 \\
\text{条　件} & -2x_1 - 3x_2 \geq -6, \\
& x_1 - 2x_2 \geq -2, \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}
\end{array}
$$

図を描いてみる
そして解いてみる：$x_1 = 3, x_2 = 0$ は最適解で，最適値は -6



〈復習〉混合整数計画問題

混合整数計画問題 (mixed integer program) **とは次のような数理計画問題**

$$
\begin{array}{ll}
\textbf{最小化} & -2x_1 + x_2 \\
\underset{x_1,x_2}{} & \\
\textbf{条　件} & -2x_1 - 3x_2 \geq -6, \\
 & x_1 - 2x_2 \geq -2, \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\
 & x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{R}
\end{array}
$$

- **変数は整数値を取るものと実数値を取るものがある**
- **目的関数は線形関数**
- **制約は線形式 (等式，または，等号付きの不等式)**

混合整数計画法 (mixed integer programming) とは？

- **混合整数計画問題を用いた数理モデル化による問題解決**
- **それに関する研究分野**

目的関数，制約が線形でないものも，混合整数計画問題と呼ぶことがある

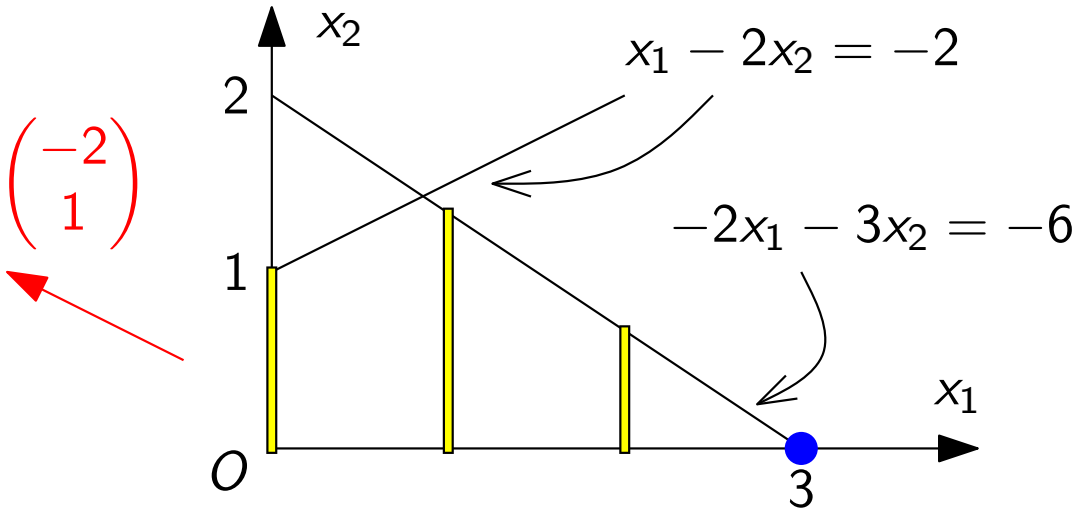
〈復習〉混合整数計画問題：図を描いて解く

この混合整数計画問題を解く

$$
\begin{array}{ll}
\textbf{最小化}_{x_1,x_2} & -2x_1 + x_2 \\
\textbf{条　件} & -2x_1 - 3x_2 \geq -6, \\
& x_1 - 2x_2 \geq -2, \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\
& x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{R}
\end{array}
$$

図を描いてみる

そして解いてみる：$x_1 = 3, x_2 = 0$ は最適解で，最適値は -6



〈復習〉0-1 整数計画問題

0-1 整数計画問題 (0-1 integer program) とは次のような数理計画問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化}_{x_1,x_2} & -2x_1 + x_2 \\
\text{条　件} & -2x_1 - 3x_2 \geq -6, \\
& x_1 - 2x_2 \geq -2, \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\
& x_1, x_2 \in \{0, 1\}
\end{array}
$$

- 変数は 0 か 1 の値を取る
- 目的関数は線形関数
- 制約は線形式 (等式，または，等号付きの不等式)

0-1 整数計画法 (integer programming) とは？

- 0-1 整数計画問題を用いた数理モデル化による問題解決
- それに関する研究分野

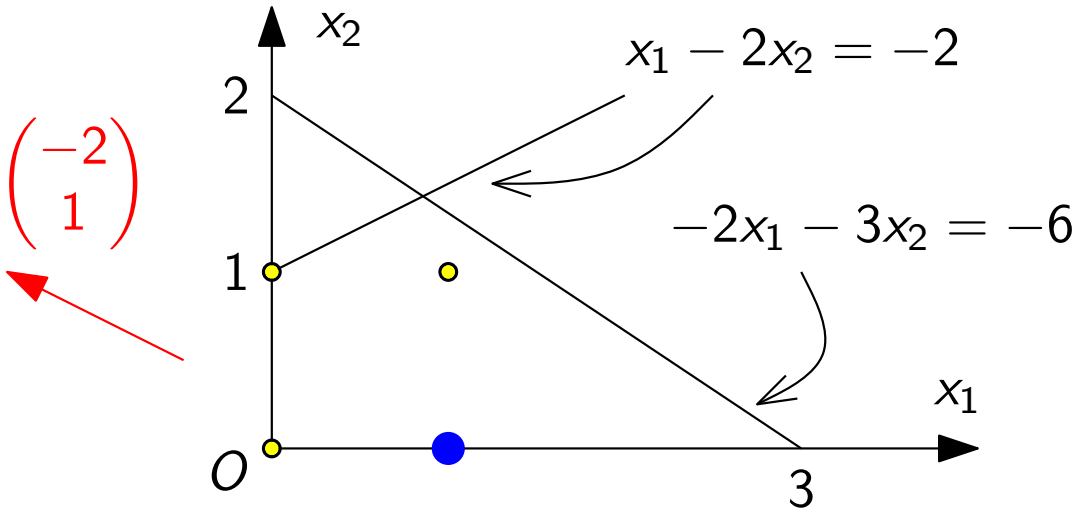
目的関数，制約が線形でないものも，0-1 整数計画問題と呼ぶことがある

〈復習〉0-1 整数計画問題：図を描いて解く

この 0-1 整数計画問題を解く

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化}_{x_1,x_2} & -2x_1 + x_2 \\
\text{条　件} & -2x_1 - 3x_2 \geq -6, \\
& x_1 - 2x_2 \geq -2, \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\
& x_1, x_2 \in \{0, 1\}
\end{array}
$$

図を描いてみる
そして解いてみる：$x_1 = 1, x_2 = 0$ は最適解で，最適値は -2



目次

1. ナップサック問題
2. 割当問題
3. 施設配置問題
4. 今日のまとめと今後の予告

ナップサック問題

ナップサック問題 (森，松井 '04 より)

- いま手元に 4 つの商品が 1 つずつあるとしよう．
- これをナップサックに詰めて街に売りに行くとする．
- それぞれの重さと，売った際の収益は表の通りとする．

商品	1	2	3	4
収入 [万円]	3	4	1	2
重さ [kg]	2	3	1	3

- 商品はどれも，街にもっていけば必ず売れるとする．
- ただし，街にもっていく際ナップサックに詰めて運ぶのだが，ナップサックに積載重量制限があり，最大でも 4 kg までしか積めないとする．
- このとき，ナップサックの重量制限以内で総収益を最大にするには，どの荷物を詰めていったらよいか？

最適化モデル作成のポイント

最適化モデル作成のポイント：基礎

次を明確にする

- 変数は何か？ 何を変数は表すのか？
- 目的関数は何か？ 何を最適化するのか？
- 制約は何か？ 何を制約は表すのか？

最適化モデル作成のポイント：基礎の次

次を心がける

- 「非線形よりも線形」を目指す
- 「整数計画よりも 0-1 整数計画」を目指す
- 「big-M は使わない」を目指す

ナップサック問題：変数

決定すべきこと：どの商品をナップサックに詰めるか (選択)

- **各商品** $i = 1, 2, 3, 4$ **に対して**

$$x_i \in \{0, 1\}$$

という変数を設定する

- **解釈：**

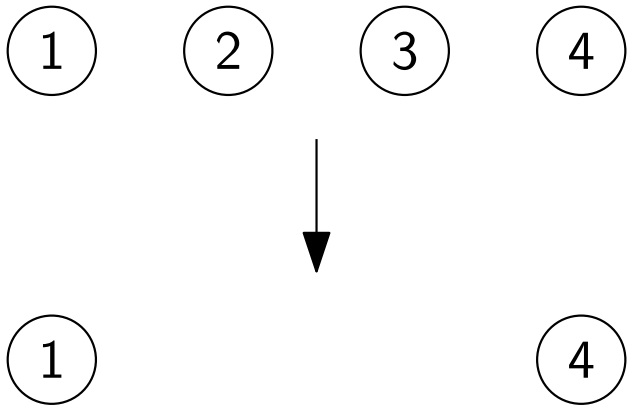
$$\begin{cases} x_i = 0 & \Leftrightarrow \quad \text{商品 } i \text{ をナップサックに詰めない} \\ x_i = 1 & \Leftrightarrow \quad \text{商品 } i \text{ をナップサックに詰める} \end{cases}$$

- **変数の数** $= 4$ **(商品の数)**

ポイント

0-1 **変数で「選択」を表現する**

ナップサック問題：選択のイメージ



$x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1$ **のとき**

ナップサック問題：目的関数

最適化するもの：総収益

- **目的は**

$$\textbf{最大化} \quad 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4$$

- **解釈：総収益**

商品	1	2	3	4
収入 [万円]	3	4	1	2
重さ [kg]	2	3	1	3

例えば， $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1$ **のとき**

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 + 2 = 5$$

ナップサック問題：制約

制約：詰める商品の総重量はナップサックの重量制限 (4 kg) 以下

- **制約は**

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 4$$

- **解釈：詰める商品の総重量はナップサックの重量制限** (4 kg) **以下**

商品	1	2	3	4
収入 [万円]	3	4	1	2
重さ [kg]	2	3	1	3

例えば， $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1$ **のとき**

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 + 3 = 5 > 4$$

なので，制約は満たされない

ナップサック問題：整数計画法によるモデルの完成

ナップサック問題の整数計画モデル

$$
\begin{array}{ll}
\textbf{最大化} & 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \\
\underset{\boldsymbol{x}}{\textbf{条件}} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 4, \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}
\end{array}
$$

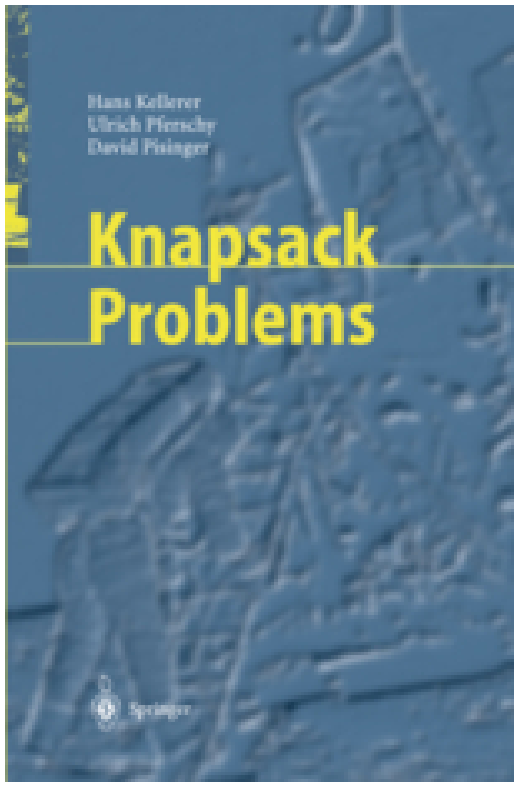
商品	1	2	3	4
収入 [万円]	3	4	1	2
重さ [kg]	2	3	1	3

比喩としてのナップサック問題

荷物	ナップサックの重量制限	荷物の重量	価値
観測機器	人工衛星の積載重量制限	観測機器の重量	観測結果の価値
工作機械	工場の総電力量	機械の使用電力	加工製品の量
計算プロセス	大型計算機の稼働時間	プロセスの処理時間	処理したプロセス数
雇用できる作業員	雇用予算	作業員の給与	製造製品の量
イベント企画	プロジェクト総予算	各イベント企画予算	イベントの収益

などなど

ナップサック問題の本



H. Kellerer, U. Pferschy, and D. Pisinger,
Knapsack Problems,
Springer, 2004

最適化モデル作成のポイント

最適化モデル作成のポイント：基礎

次を明確にする

- 変数は何か？ 何を変数は表すのか？
- 目的関数は何か？ 何を最適化するのか？
- 制約は何か？ 何を制約は表すのか？

最適化モデル作成のポイント：基礎の次

次を心がける

- 「非線形よりも線形」を目指す
- 「整数計画よりも 0-1 整数計画」を目指す
- 「big-M は使わない」を目指す

ナップサック問題 (変種)

ナップサック問題 (設定を少し変更)

- いま手元に 4 種類の商品の在庫があるとしよう．
- これをナップサックに詰めて街に売りに行くとする．
- それぞれの重さ，売った際の収益，在庫数は表の通りとする．

商品	1	2	3	4
収入 [万円]	3	4	1	2
重さ [kg]	2	3	1	3
在庫数 [個]	2	1	3	2

- 商品はどれも，街にもっていけば必ず売れるとする．
- ただし，街にもっていく際ナップサックに詰めて運ぶのだが，
  ナップサックに積載重量制限があり，
  最大でも 4 kg までしか積めないとする．
- このとき，ナップサックの重量制限以内で総収益を最大にするには，
  どの荷物を詰めていったらよいか？

ナップサック問題 (変種)：第 1 の定式化 (変数)

決定すべきこと：どの商品をいくつナップサックに詰めるか

- 各商品 $i = 1, 2, 3, 4$ に対して

$$x_i \in \mathbb{Z}$$

  という変数を設定する
- 解釈：

$$x_i = k \Leftrightarrow \text{商品 } i \text{ を } k \text{ 個ナップサックに詰める}$$

- 変数の数 $= 4$ (商品の数)

ポイント

整数変数で「個数」を表現する

ナップサック問題 (変種)：第 1 の定式化 (目的関数)

最適化するもの：総収益

- **目的は**

$$\textbf{最大化} \quad 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4$$

- **解釈：総収益**

例えば，$x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 1$ のとき

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \cdot 2 + 1 + 2 = 9$$

ナップサック問題 (変種)：第 1 の定式化 (制約 1)

制約：詰める商品の総重量はナップサックの重量制限 (4 kg) 以下

- **制約は**

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 4$$

- **解釈：詰める商品の総重量はナップサックの重量制限** (4 kg) **以下**

例えば， $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 1$ **のとき**

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \cdot 2 + 1 + 3 = 8 > 4$$

なので，制約は満たされない

ナップサック問題 (変種)：第 1 の定式化 (制約 2)

制約：詰める商品の個数は 0 以上で在庫量以下

- **制約は**

$$0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 1, 0 \leq x_3 \leq 3, 0 \leq x_4 \leq 2$$

- **解釈：詰める商品の個数は 0 以上で在庫量以下**

商品	1	2	3	4
収入 [万円]	3	4	1	2
重さ [kg]	2	3	1	3
在庫数 [個]	2	1	3	2

ナップサック問題の変種：整数計画法によるモデル (1) の完成

ナップサック問題の変種の整数計画モデル：その 1

$$
\begin{aligned}
\textbf{最大化}_{x} \quad & 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \\
\textbf{条件} \quad & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 4, \\
& 0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 1, 0 \leq x_3 \leq 3, 0 \leq x_4 \leq 2, \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

商品	1	2	3	4
収入 [万円]	3	4	1	2
重さ [kg]	2	3	1	3
在庫数 [個]	2	1	3	2

ナップサック問題 (変種)：第 2 の定式化 (変数)

アイディア：ナップサック問題であると見なす

商品	1	2	3	4
収入 [万円]	3	4	1	2
重さ [kg]	2	3	1	3
在庫数 [個]	2	1	3	2

↓

商品	1	2	3	4	5	6	7	8
収入 [万円]	3	3	4	1	1	1	2	2
重さ [kg]	2	2	3	1	1	1	3	3

ナップサック問題 (変種)：第 2 の定式化 (変数) 続

アイディア：ナップサック問題であると見なす

- 各商品 $i = 1, \ldots, 8$ に対して $x_i \in \{0, 1\}$ という変数を設定する
- 解釈：

$$\begin{cases} x_i = 0 & \Leftrightarrow \quad \text{商品 } i \text{ をナップサックに詰めない} \\ x_i = 1 & \Leftrightarrow \quad \text{商品 } i \text{ をナップサックに詰める} \end{cases}$$

- 変数の数 $= 8$ (変換した後の商品の数)

商品	1	2	3	4	5	6	7	8
収入 [万円]	3	3	4	1	1	1	2	2
重さ [kg]	2	2	3	1	1	1	3	3

ナップサック問題 (変種)：第 2 の定式化 (目的関数)

最適化するもの：総収益

- 目的は

$$\text{最大化} \quad 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + 2x_7 + 2x_8$$

- 解釈：総収益

商品	1	2	3	4	5	6	7	8
収入 [万円]	3	3	4	1	1	1	2	2
重さ [kg]	2	2	3	1	1	1	3	3

ナップサック問題 (変種)：第 2 の定式化 (制約)

制約：詰める商品の総重量はナップサックの重量制限 (4 kg) 以下

- **制約は**

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + 3x_7 + 3x_8 \leq 4$$

- **解釈：詰める商品の総重量はナップサックの重量制限 (4 kg) 以下**

商品	1	2	3	4	5	6	7	8
収入 [万円]	3	3	4	1	1	1	2	2
重さ [kg]	2	2	3	1	1	1	3	3

ナップサック問題の変種：整数計画法によるモデル (2) の完成

ナップサック問題の変種の整数計画モデル：その 2

$$
\begin{array}{ll}
\textbf{最大化}_{x} & 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + 2x_7 + 2x_8 \\
\textbf{条件} & 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + 3x_7 + 3x_8 \leq 4, \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \in \{0, 1\}
\end{array}
$$

商品	1	2	3	4	5	6	7	8
収入 [万円]	3	3	4	1	1	1	2	2
重さ [kg]	2	2	3	1	1	1	3	3

ナップサック問題 (変種)：第 3 の定式化 (変数)

アイディア：「商品を何個詰む」という選択に着目

- $x_{1,0}, x_{1,1}, x_{1,2}, x_{2,0}, x_{2,1}, x_{3,0}, x_{3,1}, x_{3,2}, x_{3,3}, x_{4,0}, x_{4,1}, x_{4,2} \in \{0, 1\}$ という変数を設定する
- 解釈：

$$\begin{cases} x_{i,j} = 1 & \Leftrightarrow \quad \text{商品 } i \text{ をちょうど } j \text{ 個ナップサックに詰める} \\ x_{i,j} = 0 & \Leftrightarrow \quad \text{そうはしない} \end{cases}$$

- 変数の数 $= 13$

商品	1	2	3	4
収入 [万円]	3	4	1	2
重さ [kg]	2	3	1	3
在庫数 [個]	2	1	3	2

ナップサック問題 (変種)：第 3 の定式化 (目的関数)

最適化するもの：総収益

- 目的は

  最大化 $3x_{1,1} + 6x_{1,2} + 4x_{2,1} + x_{3,1} + 2x_{3,2} + 3x_{3,3} + 2x_{4,1} + 4x_{4,2}$

- 解釈：総収益

商品	1	2	3	4
収入 [万円]	3	4	1	2
重さ [kg]	2	3	1	3
在庫数 [個]	2	1	3	2

ナップサック問題 (変種)：第 3 の定式化 (制約 1)

制約：詰める商品の総重量はナップサックの重量制限 (4 kg) 以下

- **制約は**

$$2x_{1,1} + 4x_{1,2} + 3x_{2,1} + x_{3,1} + 2x_{3,2} + 3x_{3,3} + 3x_{4,1} + 6x_{4,2} \leq 4$$

- **解釈：詰める商品の総重量はナップサックの重量制限 (4 kg) 以下**

商品	1	2	3	4
収入 [万円]	3	4	1	2
重さ [kg]	2	3	1	3
在庫数 [個]	2	1	3	2

ナップサック問題 (変種)：第 3 の定式化 (制約 2)

制約：どの商品も詰む個数は 1 通りに決まる

- 制約は

$$
\begin{aligned}
x_{1,0} + x_{1,1} + x_{1,2} &= 1, \\
x_{2,0} + x_{2,1} &= 1, \\
x_{3,0} + x_{3,1} + x_{3,2} + x_{3,3} &= 1, \\
x_{4,0} + x_{4,1} + x_{4,2} &= 1
\end{aligned}
$$

- 解釈：どの商品も詰む個数は 1 通りに決まる

商品	1	2	3	4
収入 [万円]	3	4	1	2
重さ [kg]	2	3	1	3
在庫数 [個]	2	1	3	2

ナップサック問題の変種：整数計画法によるモデル (3) の完成

ナップサック問題の変種の整数計画モデル：その 3

$$
\begin{aligned}
\text{最大化}_{x} \quad & 3x_{1,1} + 6x_{1,2} + 4x_{2,1} + x_{3,1} + 2x_{3,2} + 3x_{3,3} + 2x_{4,1} + 4x_{4,2} \\
\text{条件} \quad & 2x_{1,1} + 4x_{1,2} + 3x_{2,1} + x_{3,1} + 2x_{3,2} + 3x_{3,3} + 3x_{4,1} + 6x_{4,2} \leq 4, \\
& x_{1,0} + x_{1,1} + x_{1,2} = 1, \\
& x_{2,0} + x_{2,1} = 1, \\
& x_{3,0} + x_{3,1} + x_{3,2} + x_{3,3} = 1, \\
& x_{4,0} + x_{4,1} + x_{4,2} = 1, \\
& x_{1,0}, x_{1,1}, x_{1,2}, x_{2,0}, x_{2,1}, x_{3,0}, x_{3,1}, x_{3,2}, x_{3,3}, x_{4,0}, x_{4,1}, x_{4,2} \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

目次

1 ナップサック問題

2 割当問題

3 施設配置問題

4 今日のまとめと今後の予告

割当問題

割当問題

- タクシーの配車要請が 2 件ある
- 回送しているタクシー 3 台の中の 2 台を要請先に送りたい
- タクシーのいる場所によって，得られる利益が異なる

利益 (百円)	タクシー 1	タクシー 2	タクシー 3
顧客 1	3	4	2
顧客 2	2	2	3

- 1 つの要請には 1 つのタクシーしか応じられない
- 1 つのタクシーは 1 つの要請にしか応じられない
- 総利益を最も大きくするにはどのように配車すればよいか？

最適化モデル作成のポイント

最適化モデル作成のポイント：基礎

次を明確にする

- 変数は何か？ 何を変数は表すのか？
- 目的関数は何か？ 何を最適化するのか？
- 制約は何か？ 何を制約は表すのか？

最適化モデル作成のポイント：基礎の次

次を心がける

- 「非線形よりも線形」を目指す
- 「整数計画よりも 0-1 整数計画」を目指す
- 「big-M は使わない」を目指す

割当問題：変数 よくない定式化

決定すべきこと：どのタクシーがどの要請に応えるか

- 各顧客 $i = 1, 2$ に対して

$$x_i \in \mathbb{Z}$$

  という変数を設定する
- 解釈：

$$x_i = j \quad \Leftrightarrow \quad \text{顧客 } i \text{ の要請にタクシー } j \text{ が応える}$$

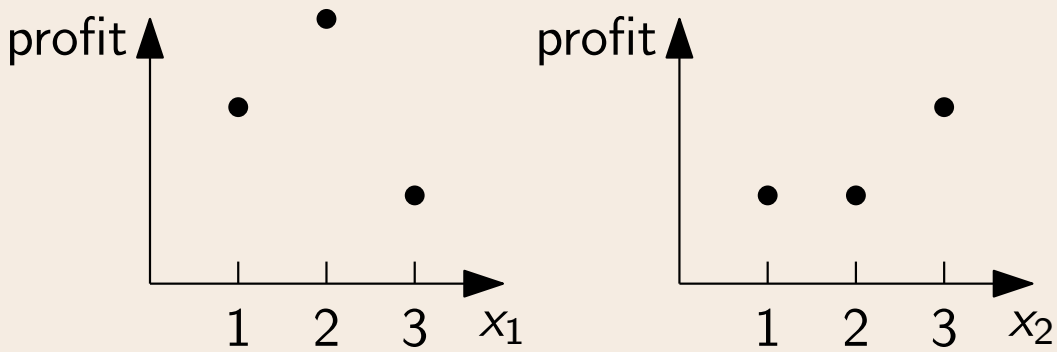
- 変数の数 $= 2$ (顧客の数)

割当問題：目的関数 よくない定式化

最適化するもの：総収益

なぜよくないか？

- 目的関数が**非線形**になる



利益 (百円)	タクシー 1	タクシー 2	タクシー 3
顧客 1	3	4	2
顧客 2	2	2	3

ポイント

数字が「数値」を表すのか，単に「ラベル (添え字)」を表すのか吟味

「タクシー 1, 2, 3」の「1, 2, 3」という数字に数値としての意味はない

割当問題：変数

決定すべきこと：どのタクシーがどの要請に応えるか (選択)

- **各顧客** $i = 1, 2$ **と各タクシー** $j = 1, 2, 3$ **に対して**

$$x_{i,j} \in \{0, 1\}$$

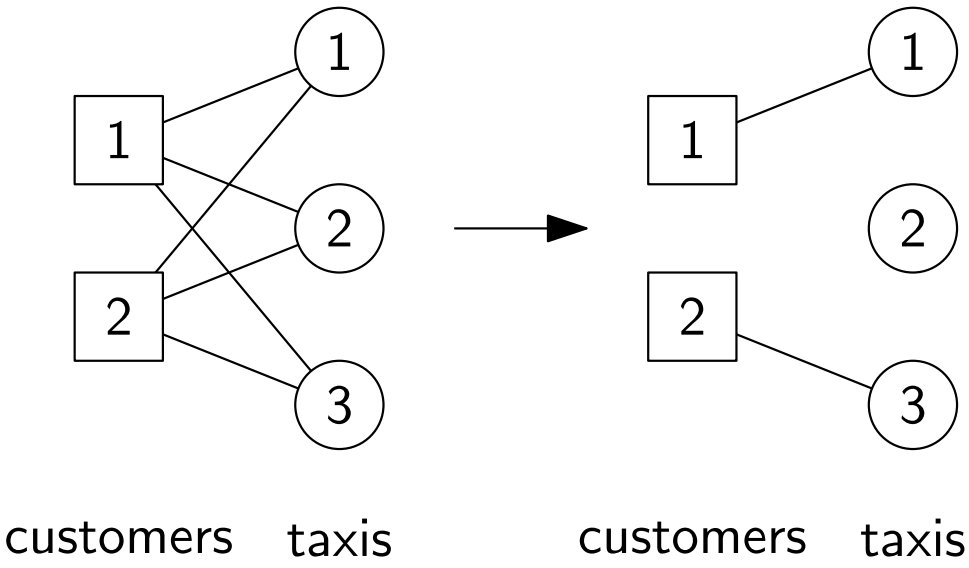
という変数を設定する

- **解釈：**

$$\begin{cases} x_{i,j} = 0 & \Leftrightarrow \text{顧客 } i \text{ の要請にタクシー } j \text{ が応えない} \\ x_{i,j} = 1 & \Leftrightarrow \text{顧客 } i \text{ の要請にタクシー } j \text{ が応える} \end{cases}$$

- **変数の数** $= 6$ **(顧客の数** $\times$ **タクシーの数)**

割当問題：選択のイメージ



$x_{1,1} = 1,\ x_{1,2} = 0,\ x_{1,3} = 0,\ x_{2,1} = 0,\ x_{2,2} = 0,\ x_{2,3} = 1$ **のとき**

割当問題：目的関数

最適化するもの：総利益

- 目的は

$$\text{最大化} \quad 3x_{1,1} + 4x_{1,2} + 2x_{1,3} + 2x_{2,1} + 2x_{2,2} + 3x_{2,3}$$

- 解釈：総利益の最大化

利益 (百円)	タクシー 1	タクシー 2	タクシー 3
顧客 1	3	4	2
顧客 2	2	2	3

割当問題：制約 1

制約：1 つの要請には 1 つのタクシーしか応じられない

- 制約

$$\begin{aligned} x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} &\leq 1, \\ x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} &\leq 1 \end{aligned}$$

- 解釈：1 つの要請には 1 つのタクシーしか応じられない

利益 (百円)	タクシー 1	タクシー 2	タクシー 3
顧客 1	3	4	2
顧客 2	2	2	3

割当問題：制約 2

制約：1 つのタクシーは 1 つの要請にしか応じられない

- 制約

$$
\begin{aligned}
x_{1,1} + x_{2,1} &\leq 1, \\
x_{1,2} + x_{2,2} &\leq 1, \\
x_{1,3} + x_{2,3} &\leq 1
\end{aligned}
$$

- 解釈：1 つのタクシーは 1 つの要請にしか応じられない

利益 (百円)	タクシー 1	タクシー 2	タクシー 3
顧客 1	3	4	2
顧客 2	2	2	3

割当問題：整数計画法によるモデルの完成

割当問題の整数計画モデル

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & 3x_{1,1} + 4x_{1,2} + 2x_{1,3} + 2x_{2,1} + 2x_{2,2} + 3x_{2,3} \\
\underset{x}{\text{条件}} & x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} \leq 1, \\
& x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} \leq 1, \\
& x_{1,1} + x_{2,1} \leq 1, \\
& x_{1,2} + x_{2,2} \leq 1, \\
& x_{1,3} + x_{2,3} \leq 1, \\
& x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}, x_{2,1}, x_{2,2}, x_{2,3} \in \{0, 1\}
\end{array}
$$

これは，学期後半の「ネットワーク最適化」と密接な関係を持つ

割当問題の本

R. Burkard, M. Dell'Amico, and S. Martello,
Assignment Problems, Revised Reprint,
SIAM, 2012

目次

1 ナップサック問題

2 割当問題

3 施設配置問題

4 今日のまとめと今後の予告

施設配置問題

施設配置問題 (Bosch, Trick '05 より)

- ある企業は原料を作る化学工場を 4 つ持つ
  - 各原料工場が生産する原料量 [t/週] は次ページの表のとおり
- その企業は原料を精製する工場を新たに建設したい
- 建設候補地は 3 箇所
- 次のページの表のとおり，精製工場には特性がある
  - 容量：各精製工場が処理できる原料量 [t/週]
  - 固定費用：各精製工場の建設費用 [$/年]
  - 操業費用：各精製工場の操業にかかる費用 (輸送費用も含む) [$/t]
- 決定すべきことは次の 2 つ
  - どこに精製工場を建設するか
  - どの精製工場でどの原料工場の原料をどれだけ精製するか
    (週に対して決めた方法は 1 年間変えない)
- このとき，この 1 年でかかる費用をできる限り小さくしたい

施設配置問題 (続)

施設配置問題 (続) (Bosch, Trick '05 より)

			精製工場			
			1	2	3	生産量 [t/週]
操業費用 [$/t]	原料工場	1	25	20	15	1000
		2	15	25	20	1000
		3	20	15	25	500
		4	25	15	15	500
固定費用 [$/年]			500000	500000	500000	
容量 [t/週]			1500	1500	1500	

1 年 = 52 週

最適化モデル作成のポイント

最適化モデル作成のポイント：基礎

次を明確にする

- 変数は何か？ 何を変数は表すのか？
- 目的関数は何か？ 何を最適化するのか？
- 制約は何か？ 何を制約は表すのか？

最適化モデル作成のポイント：基礎の次

次を心がける

- 「非線形よりも線形」を目指す
- 「整数計画よりも 0-1 整数計画」を目指す
- 「big-M は使わない」を目指す

施設配置問題：変数 1

決定すべきこと 1：どこに精製工場を建設するか (選択)

- 各精製工場候補地 $j = 1, 2, 3$ に対して

$$y_j \in \{0, 1\}$$

という変数を設定する

- 解釈

$$\begin{cases} y_j = 0 & \Leftrightarrow \text{候補地 } j \text{ に精製工場を建設しない} \\ y_j = 1 & \Leftrightarrow \text{候補地 } j \text{ に精製工場を建設する} \end{cases}$$

施設配置問題：変数 2

**決定すべきこと：どの精製工場でどの原料工場の原料を
どれだけ精製するか (量の決定)**

- **各原料工場** $i = 1, 2, 3, 4$ **と各精製工場候補地** $j = 1, 2, 3$ **に対して**

$$x_{i,j} \in \mathbb{R}$$

という変数を設定する

- **解釈**

$x_{i,j} = r \Leftrightarrow$ **原料工場** i **の原料を精製工場** j **で** r [t/週] **だけ処理する**

変数の数

- 0-1 **変数の数** $= 3$ $(=$ **精製工場候補地の数**$)$
- **実変数の数** $= 12$ $(=$ **原料工場の数** $\times$ **精製工場候補地の数**$)$

定式化で得られるものは「混合整数計画問題」になる

施設配置問題：目的関数

最適化するもの：年間総費用 (最小化)

- 目的は

$$
\begin{aligned}
\text{最小化} \quad & 52 \cdot 25x_{11} + 52 \cdot 20x_{12} + 52 \cdot 15x_{13} \\
& + 52 \cdot 15x_{21} + 52 \cdot 25x_{22} + 52 \cdot 20x_{23} \\
& + 52 \cdot 20x_{31} + 52 \cdot 15x_{32} + 52 \cdot 25x_{33} \\
& + 52 \cdot 25x_{41} + 52 \cdot 15x_{42} + 52 \cdot 15x_{43} \\
& + 500000y_1 + 500000y_2 + 500000y_3
\end{aligned}
$$

- 解釈：年間総費用
  - $52 \cdot 20x_{12}$ = 原料工場 1 からの原料を精製工場 2 で x_{12} [t/週] だけ処理したとき，年間でかかる費用
  - $500000y_1$ = 精製工場 1 を建設するための固定費用

施設配置問題：制約 1

制約：各原料工場に対して，生産量と精製工場での処理量は等しい

- **制約**

$$
\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} &= 1000, \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} &= 1000, \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} &= 500, \\
x_{41} + x_{42} + x_{43} &= 500
\end{aligned}
$$

- **各原料工場に対して，生産量と精製工場での処理量は等しい**

施設配置問題：制約 2

制約：処理量は非負実数

- **制約**

$$
\begin{aligned}
&x_{11} \geq 0, x_{12} \geq 0, x_{13} \geq 0, \\
&x_{21} \geq 0, x_{22} \geq 0, x_{23} \geq 0, \\
&x_{31} \geq 0, x_{32} \geq 0, x_{33} \geq 0, \\
&x_{41} \geq 0, x_{42} \geq 0, x_{43} \geq 0
\end{aligned}
$$

- **解釈：処理量は非負実数**

施設配置問題：制約 3

制約：建設した精製工場の総処理量は容量以下

例えば，精製工場 1 の場合

- **建設すれば，**1500 [t/**週**] **までは処理できる**
- **建設しなければ，処理できない** (0 [t/**週**] **までは処理できる**)

すなわち

- $y_1 = 1 \Rightarrow x_{1,1} + x_{2,1} + x_{3,1} + x_{4,1} \leq 1500$
- $y_1 = 0 \Rightarrow x_{1,1} + x_{2,1} + x_{3,1} + x_{4,1} \leq 0$

以上を踏まえて，次のページの制約を設定する

施設配置問題：制約 3 (続)

制約：建設した精製工場の総処理量は容量以下

- 制約

$$
\begin{aligned}
x_{1,1} + x_{2,1} + x_{3,1} + x_{4,1} &\leq 1500y_1, \\
x_{1,2} + x_{2,2} + x_{3,2} + x_{4,2} &\leq 1500y_2, \\
x_{1,3} + x_{2,3} + x_{3,3} + x_{4,3} &\leq 1500y_3
\end{aligned}
$$

- 解釈：建設した精製工場の総処理量は容量以下

これは線形不等式：例えば，はじめの式は次と同値

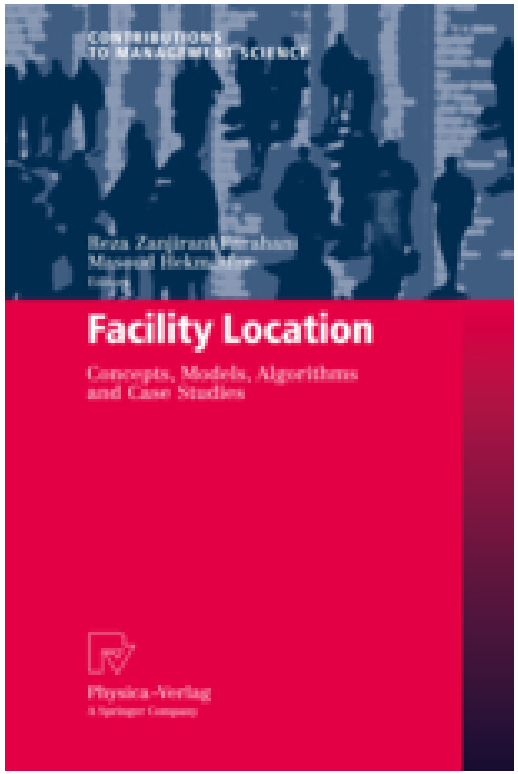
$$x_{1,1} + x_{2,1} + x_{3,1} + x_{4,1} - 1500y_1 \leq 0$$

施設配置問題：混合整数計画法によるモデルの完成

施設配置問題の混合整数計画モデル

$$
\begin{aligned}
\underset{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}{\textbf{最小化}} \quad & 52\cdot 25x_{11} + 52\cdot 20x_{12} + 52\cdot 15x_{13} + 52\cdot 15x_{21} + 52\cdot 25x_{22} \\
& + 52\cdot 20x_{23} + 52\cdot 20x_{31} + 52\cdot 15x_{32} + 52\cdot 25x_{33} + 52\cdot 25x_{41} \\
& + 52\cdot 15x_{42} + 52\cdot 15x_{43} + 500000y_1 + 500000y_2 + 500000y_3 \\
\textbf{条　件} \quad & x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1000, x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1000, \\
& x_{31} + x_{32} + x_{33} = 500, x_{41} + x_{42} + x_{43} = 500, \\
& x_{1,1} + x_{2,1} + x_{3,1} + x_{4,1} \leq 1500y_1, \\
& x_{1,2} + x_{2,2} + x_{3,2} + x_{4,2} \leq 1500y_2, \\
& x_{1,3} + x_{2,3} + x_{3,3} + x_{4,3} \leq 1500y_3, \\
& x_{11} \geq 0, x_{12} \geq 0, x_{13} \geq 0, x_{21} \geq 0, x_{22} \geq 0, x_{23} \geq 0, \\
& x_{31} \geq 0, x_{32} \geq 0, x_{33} \geq 0, x_{41} \geq 0, x_{42} \geq 0, x_{43} \geq 0, \\
& x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{41}, x_{42}, x_{43} \in \mathbb{R} \\
& y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

施設配置問題の本



R. Zanjirani Farahani, and M. Hekmatfar (Eds.),
Facility Location,
Physica Verlag, 2009.

目次

1 ナップサック問題

2 割当問題

3 施設配置問題

4 今日のまとめと今後の予告

今日のまとめ

今日の目標

- 整数計画法を用いて様々な問題をモデル化できるようになる
- 整数変数，0-1 変数の使い方の典型例を理解する

整数計画法によるモデル化

例として

- ナップサック問題
- 割当問題
- 施設配置問題

モデル化における重要事項

- 変数，目的関数，制約が何であるかを明確にする
- 選択を表現するために 0-1 変数を用いる

今後の予告

整数計画法

- 済 どのような問題をモデル化できるのか？ (モデリング)
- どのように解くのか？ (アルゴリズム)
  - そのときに，線形計画法をどのように使うのか？
  - 緩和 (基礎) ← 次回
  - 分枝限定法
  - 切除平面法

復習テスト 1 (5 月 10 日) の出題範囲は第 1 回 (前回) から第 3 回 (次回) まで

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員は巡回
- 退室時，出席カードに感想，質問など書いて提出する
  - 内容は何でも OK
  - 匿名推奨