

第8章 複雑な意思決定とゲーム理論

これまでの章では、現実に関わり得る様々な意思決定の状況と、最適化を中心にした OR のツールの適用例を見てきました。そこでの意思決定は、目的を明確にした上で最適化を行うという意味で合理的ではあるものの、自らの意思決定が自分を取り巻く意思決定環境に影響を与えることがほとんどないような状況を考えていました。しかし、現実には自分以外にも意思決定者がいて、自分の意思決定がそういった他の合理的な意思決定者の意思決定に影響を与えたり、逆にそこから影響を受けたりすることは日常茶飯事です。本章ではそのような、より複雑な意思決定状況を考える枠組みを提供するゲーム理論について学びます。

8.1 戦略形ゲームとナッシュ均衡

8.1.1 戦略形ゲームと展開形ゲーム

現実社会の意思決定場面では、様々な意思決定主体が存在し、お互いの選択がそれぞれの結果に影響するという状況が普通です。たとえば、図 8.1(a) では、意思決定者である A さん（プレイヤー A）は3つ選択肢を持っており、それをいずれか1つを選択したとします。しかし、それだけでは結果が確定しません。なぜなら、いずれの結果が実現するかは、B さんという別の意思決定者がどの選択をするかに依存しているからです。

自分の意思決定が限定的にしかコントロールできないという点で、第7章の不確実性下の意思決定と似ていますが、こちらの場合は B さんのような自分以外の意思決定者がいて、彼／彼女も自分と同じように目的を持って意思決定を行うという点が大きく違う点です。このように、自分以外の意思決定者の存在を考慮した意思決定分析の方法論は**ゲーム理論** (game theory) と呼ばれます。この章ではゲーム理論の基本的な考え方を学んでいきます。

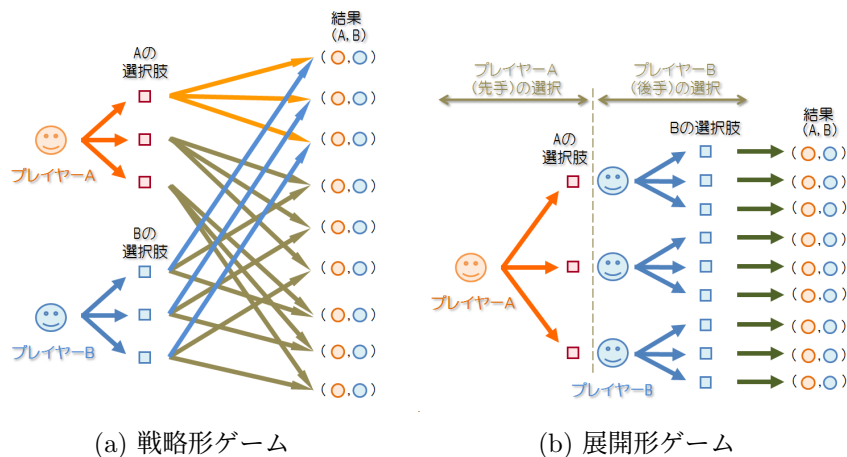


図 8.1: ゲーム論的意思決定

ゲーム理論では図 8.1(a) のような状況だけでなく、(b) のように、意思決定者が交互に選択をしていくような状況も考えます。前者は**戦略形ゲーム** (strategic form game) と呼ばれ、じゃんけんなどが分かり易い例でしょう。後者は**展開形ゲーム** (extensive form game) と呼ばれ、将棋や囲碁のように先手と後手が交互に選択を繰り返すボード・ゲームはこの延長線上にあります。いずれのゲームも意思決定者（ゲーム理論

では**プレイヤー** (player) と呼びます) は2人以上でも構いませんし、それぞれのプレイヤーの選択肢は同数でなくても構いません。また、それぞれ1回ずつ選択をして終わりではなく、将棋や囲碁などのように何度も繰り返したり、色々な選択肢を状況に応じて様々な順番で取ったりすることも考えられます。

上で述べたような、競争の状態にあるプレイヤーの振る舞いや交渉の可能性を対象としたゲームを、特に**非協力ゲーム** (noncooperative game) と言います。最近ではゲーム理論と言うとほとんどは非協力ゲームを指します。本章前半では、非協力ゲームの中でも非常に単純な、プレイヤーが2名の戦略形ゲーム (またはその繰り返し版) のみを考えます。また、ゲーム理論には、非協力ゲームとは異なる視点から展開される**協力ゲーム** (cooperative game) がありますが、8.4節ではこれについても触れ、利益やコストの配分について考えます。

きちんとゲーム理論を学びたい場合は専門書を参照してください。本書より数式を用いずに、しかしきちりポイントを押さえて書かれている本として [5] があります (本格的な教科書についての紹介も豊富です)。

8.1.2 囚人のジレンマ

まず初めに2人のプレイヤーによる戦略形ゲームの中でも、特に有名な「囚人のジレンマ」について説明します。

例題 8.1.1 (囚人のジレンマ). ある事件の共犯 A と B がそれぞれ別の部屋で取り調べを受けている。 A と B には「否認」か「自白」の選択肢があるが、共に「否認」し通せば、別件の軽い犯罪の罪での1年ずつの服役が課され、共に「自白」すれば、共に懲役4年である。しかし、片方が「否認」し、もう片方が「自白」した場合は、「自白」した方は協力を考慮して無罪放免で懲役なしの一方、「否認」した方は懲役8年である。この状況は以下のような表でまとめられる。

		共犯者 B の選択肢	
		否認	自白
共犯者 A の 選択肢	否認	(懲役1年, 懲役1年)	(懲役8年, 無罪放免)
	自白	(無罪放免, 懲役8年)	(懲役4年, 懲役4年)

2つの「行」(横方向) は A の選択肢に対応しており、「列」(縦方向) は B の選択肢に対応している。表の中で () で囲まれた部分は、左が A の結果、右が B の結果を表している。このとき A と B はどのような選択をすることになるだろうか？

これは**囚人のジレンマ** (prisoners' dilemma) として知られる状況です。囚人それぞれは別の部屋で取り調べを受けているのでお互いの選択を打ち合わせることができず、相方が「自白」したか「否認」したかを確認する前に自ら「自白」か「否認」かの選択を迫られています。その意味で、じゃんけんと同じく同時に選択を行う戦略形ゲームです。ここで、上の結果(処分内容)を数値に置き換えておきましょう。

		共犯者 B の選択肢	
		否認	自白
共犯者 A の 選択肢	否認	(-1, -1)	(-8, 0)
	自白	(0, -8)	(-4, -4)

表の2つの数値のペアは、左の数値が A の懲役年数、右が B の懲役年数を表しています。ゲーム理論では、このような選択の結果得られる数値を一般に**利得** (payoff) と呼び、この表を**利得行列** (payoff matrix) と呼びます。利得行列は A と B それぞれの利得をまとめて書き表したものです。そこで、以下のように2人の利得を分けて考えてみます。

この行列表現を**双行列** (bimatrix) と呼ぶことがあります。

(a) A の利得表

		共犯者 B の選択肢	
		否認	自白
共犯者 A の 選択肢	否認	-1	-8
	自白	0	-4

(b) B の利得表

		共犯者 B の選択肢	
		否認	自白
共犯者 A の 選択肢	否認	-1	0
	自白	-8	-4

たとえば、A の立場 (表 (a)) に立ってみると、B が「否認」「自白」いずれの選択をしようが、A は「自白」した方が利得が高くなっています。したがって、A は B の選択に関わらず「自白」する (のが合理的である) と考えられます。このことを A にとって「自白」は「否認」を**支配する**、逆に、「否認」は「自白」に**支配される**と言います。一方、B も A と同じ状況 (表 (b)) に直面していて、A がいずれの選択をしたとしても「自白」をした方が利得が高いので「自白」する (のが合理的である) と考えられます。結果、A も B も「自白」するので、それぞれ 4 年の懲役となります。

元の利得行列でもこの事実を確認してください。

元の利得行列でもこの事実も確認してください。

しかし今一度利得行列を眺めると、2 人とも「否認」し続ければ 1 年ずつの懲役で済むことが分かります。つまり、お互いが“それぞれにとって (つまり個人的に) 合理的な選択を行った”にも関わらず、その結果得られた“(-4, -4)”よりも双方にとってより良い結果“(-1, -1)”が他に存在している、つまり“(集団として) 合理的でなかった”というわけで、まさにジレンマです。

A、B が選んだ選択“(A の選択, B の選択) = (「自白」, 「自白」)”は**ナッシュ均衡** (Nash equilibrium) と呼ばれる、ある種の安定状態にあります。たとえば、A が「自白」した後、B に A が「自白」したことを伝え (それを B が信じ) れば、B は「否認」し続ける動機を失います。これは A と B の役割を入れ替えても成り立ちます。つまり、一度“(A の選択, B の選択) = (「自白」, 「自白」)”が成立したとすれば、A と B いずれも「自白」を取り下げて「否認」に転じる動機がないという意味で安定しています。このような安定性は他の 3 つの選択の組合せにはありません。たとえば、“(A の選択, B の選択) = (「否認」, 「否認」)”という組合せは、相手が「否認」している限り、自分だけ「自白」すれば高い利得を得ることができるので、「自白」に変える動機を持っており、その意味で安定的ではないのです。

この概念を提示した J.F.Nash は 1994 年にノーベル経済学賞を受賞しました。彼の伝記を基にした映画「ビューティフル・マインド」は 2001 年の第 74 回アカデミー賞 作品賞を受賞しています。

このことをソルバーを使って確認してみましょう。

演習 8.1.1 (ナッシュ均衡の確認)。「囚人のジレンマ」において、共に自白するという選択肢の組合せがナッシュ均衡であることをソルバーを用いて確認せよ。

冗長に感じるという方はこの演習を飛ばして構いません。

1. 図 8.2 のように、シートにデータを格納します。双行列のままでは扱い難いので、シート左側の列 B から F に囚人 A の利得表と戦略を、シートの右側の列 I から M に囚人 B の利得表と戦略を記述します。

- セル範囲 D5:E6 に囚人 A の利得を、セル範囲 K5:L6 に囚人 B の利得を入力します。
- セル範囲 B5:B6 に囚人 A の戦略 (該当の選択肢を採用するとき “1”、しないとき “0”) を出力することにします。足して 1 となるようにしておけば十分なので、B5 を変数セルとして、B6 には “=1-B5” と入力しておきます。
- セル範囲 D3:E3 に囚人 B の戦略が入るとして、F5:F6 に B の戦略を所与とした場合の A の利得を入力します。具体的にはセル F5 に “=SUMPRODUCT(D5:E5,K\$3:L\$3)” と入力して、セル F6 にコピーします。セル D3 と E3 は囚人 B 用の利得表の戦略の値を反映するため、それぞれ “=K3”、“=L3” と入力しておきます。
- セル B3 に A の (期待) 利得を出力するため、“=SUMPRODUCT(B5:B6,F5:F6)” と入力します。
- 囚人 B についても戦略を入力します。セル I5 と I6 に A の戦略を出力するために、それぞれ “=B5”、“=B6” と入力します。
- セル範囲 K7:L7 に A の戦略を所与とした場合の B の利得を入力します。具体的にはセル K7 に “=SUMPRODUCT(\$I5:\$I6,K5:K6)” と入力して、セル L7 にコピーします。
- セル I3 に B の (期待) 利得を出力するため、“=SUMPRODUCT(K3:L3,K7:L7)” と入力します。

共に「自白」なので、セル B5 に “0” を、セル K3、L3 にそれぞれ “0”、“1” と入力しておきます。A、B とも利得が “-4” となっていることを確認してください。

2. ソルバーを起動し、次のように「ソルバーのパラメーター」を設定します。

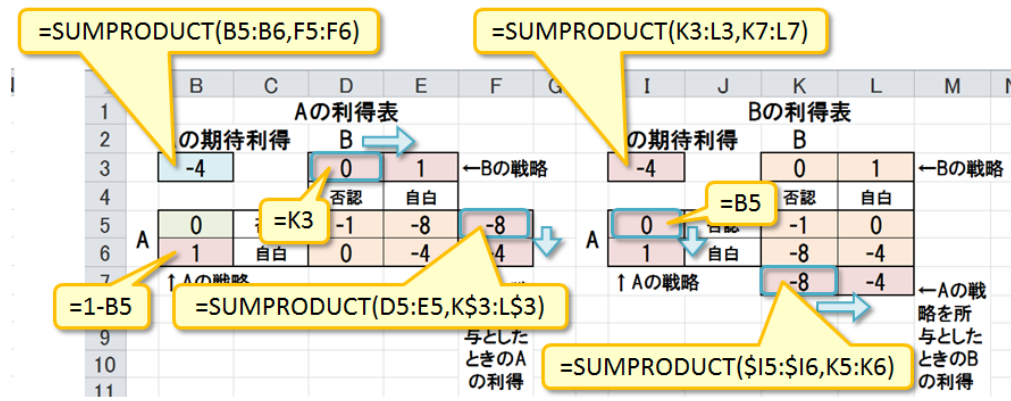


図 8.2: 囚人 A の最適反応戦略を確認するための Excel シート

- 「目的セル」はセル B3
- 「目標値」は「最大値」をチェック
- 「変数セル」としてセル B5 のみ
- 「制約条件」はありません
- 「制約のない変数を非負数にする」をチェック
- 「解決方法の選択」は「GRG 非線形」を選択します。

選択肢が2つのいずれかですので、変数セル B3 を「バイナリ変数」(0-1 変数)に指定しておくのが自然に思われるかもしれませんが、ここでは「バイナリ変数」の制約を課さずに連続変数として扱います。もしこのように整数制約を緩めた上でも最適値が改善しない場合には、より強い意味で「現在の選択肢を変更する動機がない」ことを意味することに注意してください。LP なので「シンプレックス LP」を選択するのが普通ですが、現在の解が最適解である場合に変更しないようにするために、敢えて非線形計画用のアルゴリズム「GRG」を選択します。

このような整数性の緩和は、混合戦略と呼ばれる確率的な戦略まで拡張した、より一般的な状況におけるナッシュ均衡の確認になっています。

3. 「解決」をクリックして実行すると、すぐに最適解が見つかって終了します。結果、戦略は変わりません。(囚人 A と囚人 B は対称的な利得構造をしているので B も同様です。) これは「共に「白」する」戦略の組がナッシュ均衡であることを示しています。
4. 逆に、共に「否認」の状態ではどうでしょうか? B5 に「1」を入力し、K3, L3 にそれぞれ「1」、「0」と入力します。利得は双方“-1”ずつです。ソルバーを実行すると、A は戦略を「白」に変えるのが最適となります。
5. 試しに、「否認」と「白」をコインを投げるなどして 50% ずつの確率で決める戦略を考えます。B5、K3, L3 それぞれに“0.5”を入力しソルバーを実行してください。やはり「白」のみを選択するのが最適解になります。

このように「囚人のジレンマ」では、お互いが相手の戦略に対して最適な手(最適反応戦略 best response strategy と言います)を打つと、自動的にナッシュ均衡に行き着きます。「囚人のジレンマ」には1組しかナッシュ均衡がありませんが、一般にゲームのナッシュ均衡は1つに限りません。また、「囚人のジレンマ」では各プレイヤーはいずれか1つの選択肢を選択する(純粋戦略 pure strategy と言います)と仮定していますが、“「否認」と「白」をコインを投げるなどして 50% ずつの確率で決める戦略”のように、確率的に選択するような戦略に拡張する(混合戦略 mixed strategy と言います)ことが可能です。

ゲーム理論の目的の1つはナッシュ均衡であるような選択の組を見つけることにあります。

8.1.3 ゲーム理論的モデル化の面白さ

「囚人のジレンマ」は次のような特徴を持っています。

- 相手が「否認」「自白」いずれを選んでも、自分は「自白」を選んだ方がより好ましい。
- 共に「自白」を選ぶより、共に「否認」を選んだ方が 2 人にとって好ましい。

このように「囚人のジレンマ」は単純でありながら、ゲーム理論が対象とする状況の奥深さを存分に伝えてくれます。現実にはこのような状況があったとすると、2 人の囚人が共に「自白」する事象しか観察されないでしょう。そうすると、このようなモデルを考えない限り、達成されない状況「共に「否認」や「自白」と「否認」にまで考えが及びにくいということもあるでしょうし、両者にとって個人的に最善な行動が、結果として両者にとって集団として最善にならない状況があるということに思いが至らないのではないのでしょうか。モデル化は現実には起こらなかった、見えない事象を見せるという効果をもたらしてくれます。

本節の最後に、1 つ戦略形ゲームを使った簡単な経済政策の分析例を考えてみましょう。ここで取り上げるのは近年導入され、議論の多い「高速道路無料化」についてです。

一般に、利得がこのような大小関係を持っていれば「囚人のジレンマ」と言います。

高速道路料金と混雑 高速道路の料金と利用者の便益について考えてみます。ここでは簡単のため、利用者を 2 つのタイプに分けて、あたかも 2 人のプレイヤーがいる戦略形ゲームとして考えます。プレイヤーのタイプは、仕事などのために多少支払っても高速道路を使いたい（支払ってもよい価格（willingness to pay; WTP）の高い）人々（A タイプ）と、安ければ使いたいという WTP の低い人々（B タイプ）の 2 つのタイプに分けられるとします。

現在の料金体系での両者の利得が表 8.1(a) に表されているとしましょう。この利得行列 (a) から次のような状況が読み取れます。

- タイプ A の人々は、利用できないよりは利用できた方がありがたいが、タイプ B も同時に利用すると混雑により利得は減少する
- 一方、タイプ B の人々は、タイプ A の人々が利用していなければ、利用することで利得は増加するものの、タイプ A の人たちが利用すると、利用しない方が利得は高い。
- タイプ A、B とも、自分が不利用の場合は、相手の選択によらず利得は変わらない。（タイプ B は使えなくても困らないので利得は 0 であるが、タイプ A は使えないと仕事に支障が出るので利得は -1 である。）

この利得行列（表 8.1(a)）を眺めると、タイプ A の人々にとって、「利用」が「不利用」を支配していることがわかります。したがって、タイプ A は「利用」することを選択すると考えられます。

一方、タイプ B の選択肢「利用」と「不利用」の間には支配関係がありません。この意味で「囚人のジレンマ」とは違う構造を持っています。しかし、タイプ A が「利用」を選択するので、1 行目だけに着目することで、より利得の高い「不利用」を選択すると考えられます。実際、“(A,B) = (「利用」, 「不利用」)” という選択肢の組は、相手が選択を変えない限り自分から選択を変える動機を持たないという意味でナッシュ均衡になっています。

表 8.1: 高速道路利用の利得行列

(a) 高速道路通常料金の利得

(b) 高速道路無料化の利得

		WTP が低いタイプ B	
		利用	不利用
WTP が高い タイプ A	利用	(1, -1)	(8, 0)
	不利用	(-1, 1)	(-1, 0)

		WTP が低いタイプ B	
		利用	不利用
WTP が高い タイプ A	利用	(3, 1)	(10, 0)
	不利用	(-1, 3)	(-1, 0)

次に、高速道路を無料にするという政策を考えてみます。これにより、タイプ A、B とも、「利用」した場合の利得が“+2” ずつ増加するとします。表 8.1(b) はその結果の利得行列を表しています。太字で表した部分が、(a) からの修正点です。表全体として利得が減った部分はない点に注意してください。

ここで再びタイプ A については「利用」が「不利用」を支配していますので、A は「利用」を選択します。一方、タイプ B についても「利用」が「不利用」を支配しています。したがって、表 (b) ではタイプ A と B いずれもが「利用」を選択するという結果になります。

そこで、表 8.1(a)、(b) それぞれで選択された選択肢の組合せと得られた利得を比較してみましょう。

政策	結果	A	B	合計
(a) 有料	「A 利用」「B 不利用」	8	0	8
(b) 無料	「A 利用」「B 利用」	3	1	4

結果的に、タイプ A の利得は大きく下がり、タイプ B の利得はわずかに増加し、A と B 合計の利得は 8 から 4 に減少したことになります。無料化により利得表の利得は増えるこそすれ減ることはなかったものの、合計利得は減少するという結果になるという次第です。

もちろんこの例は若干恣意的に作っていますので、「こういうこともありうる」という蓋然性を示したという以上の意味はありませんが、政策の変更は人々の行動に変化を促し、その効果は複雑に影響を与えうるということがわかんと思います。

[トピック] オークションとメカニズム・デザイン

「囚人のジレンマ」もプレイヤーである囚人の立場に立てばジレンマということになりますが、見方を変えると、取り調べに当たる刑事に対しても示唆を与えてくれます。すなわち、囚人 2 人に自白させなければ、それぞれを別の取調室で取り調べればよいということです。別々に取り調べるだけで囚人が自白することが期待できます。面倒だからといって、一緒に取り調べてしまうと囚人は結託して否認を続けるでしょう。

このように、単に意思決定者がプレイヤー自身になって戦略を立てるばかりでなく、それを逆手にとって合理的な制度やメカニズム（この場合は別々の取り調べ）を探る研究分野を**メカニズム・デザイン** (mechanism design) と言います。（ゲーム理論の成功例の多くはメカニズム・デザインでの活用法に見出されます。）

そのようなメカニズム・デザインの面白い一例がオークションの設計です。たとえば、Yahoo!オークションなどに（その亜種を）見出すことのできる**セカンド・プライス・オークション** (second price auction) は、ゲーム理論の観点から合理的な性質を持ったオークション方式であることが知られています。

他の入札者（オークション参加者）の付けた価格が分からないようなオークション（封印オークションと呼ばれます）を考えます。通常の（ファースト・プライス・）オークションが「入札によって最も高い価格を提示した入札者が、その入札価格で落札する」のに対して、セカンド・プライス・オークションは「入札によって最も高い価格を入札した入札者が、2 番目に高い入札価格で落札する」というものです。一見不思議な形式に思いかもしれませんが、セカンド・プライス・オークションでは、入札者が自分が心に描く本当の金額を入札する選択が他の金額を入札する選択を弱い意味で支配していて、参加者に自分の真の評価額に基づいて入札することを暗黙の裡に促します。これは嘘の評価額を表明して得になる余地をなくすことで、セカンド・プライス・オークションが関係者全体の利益に関してある種の公平性を担保する仕組みを内蔵していることを意味します。

セカンド・プライス・オークションを提唱した W.S.Vickrey も 1996 年のノーベル経済学賞を受賞しましたが、受賞発表の 3 日後心臓発作で亡くなりました。

8.2 2人ゼロ和ゲームと max-min 戦略

この節ではもう少し複雑な戦略形ゲームを考え、Excel ソルバーを用いた具体的な計算によりある基準に基づく戦略を求めます。ただし、ここで扱う問題は 2 人のプレイヤーの利得が（どのような選択肢の組合せ

に対しても) 一定であるような 2 人ゼロ和ゲームに焦点を絞ります。

8.2.1 混合戦略とナッシュ均衡

次の例を考えてみましょう。

例題 8.2.1 (グリコ・チョコレート・パイナップル). 勘助君と桜ちゃんが公園で、じゃんけんをして勝った方が自分の陣地に向かって相手を所定の歩数だけ引き込めるというゲームに興じている。ただし、グーで勝った場合は「グリコ」で 3 歩、チョキで勝った場合は「チョコレート」で 6 歩、パーで勝った場合は「パイナップル」で 6 歩と、勝ち手によって進める歩数が異なる。この状況を次のような双行列形式の利得表を持った戦略形ゲームとして考えたとき、混合戦略まで拡張し、お互いがグー、チョキ、パーを確率 $\frac{1}{3}$ ずつ出す戦略がナッシュ均衡でないことを確認しなさい。また、お互いがグー、チョキ、パーをそれぞれ 40%, 40%, 20% ずつ出す戦略が Nash 均衡になっていることを確認しなさい。

		桜ちゃん		
		グー	チョキ	パー
勘助君	グー	(0,0)	(3,-3)	(-6,6)
	チョキ	(-3,3)	(0,0)	(6,-6)
	パー	(6,-6)	(-6,6)	(0,0)

囚人のジレンマの場合と同じように、2 人の利得の間に対称性があります。そこで、以下では勘助君の立場から戦略を記述しますが、それは立場を逆にして、桜ちゃんにも同様に当てはまることに注意してください。

一方で、囚人のジレンマと異なり、2 人がどんな手をとっても、2 人の利得の合計値は一定値 (0) になっています。このようなゲームを**ゼロ和 2 人ゲーム** (zero-sum two-person game) と言います。

また、「囚人のジレンマ」のような、「相手の手に依らず、この手の方がこの手より良い」という支配戦略がないことがわかります。ここではとりうる戦略の可能性を混合戦略まで広げた上で、演習 8.1.1 と同じようにして、相手の戦略を所与としたときに利得をより大きくすることができるかどうかをチェックして、できない場合にナッシュ均衡になっていることを確認します。

勘助君の混合戦略を (p_g, p_c, p_p) 、桜ちゃんの混合戦略を (q_g, q_c, q_p) と書くことにします。ここで添え字 “g”、“c”、“p” はそれぞれ「グー」「チョキ」「パー」を表し、 p_g は勘助君が「グー」を出す確率、 q_c は桜ちゃんが「チョキ」を出す確率を表すとしします。勘助君、桜ちゃんの混合戦略はそれぞれ

$$p_g + p_c + p_p = 1, p_g, p_c, p_p \geq 0; \quad q_g + q_c + q_p = 1, q_g, q_c, q_p \geq 0$$

を満たします。たとえば、 $(p_g, p_c, p_p) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ と書けば、「グー」「チョキ」「パー」をそれぞれ $\frac{1}{3}$ の確率で出すことを意味します。また、 $(p_g, p_c, p_p) = (0, 1, 0)$ とすれば、勘助君が「チョキ」のみを出す戦略を表現しているので純粋戦略も含むことがわかります。

このように混合戦略を表現したとき、勘助君の (期待) 利得 $\Pi_{\text{勘助}}$ は以下のように与えられます。

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{勘助}}(p_g, p_p, p_c | q_g, q_p, q_c) = & (0 \cdot q_g + 3 \cdot q_c - 6 \cdot q_p) p_g \\ & + (-3 \cdot q_g + 0 \cdot q_c + 6 \cdot q_p) p_c \\ & + (6 \cdot q_g - 6 \cdot q_c + 0 \cdot q_p) p_p \end{aligned}$$

勘助君ができることは、桜ちゃんの戦略 (q_g, q_c, q_p) が与えられているときに、 (p_g, p_c, p_p) のみ動かして、より高い利得を得るようにすることです。これは線形計画問題 (LP)

$$\begin{array}{ll} \max_{p_g, p_c, p_p} & \Pi_{\text{勘助}}(p_g, p_c, p_p | q_g, q_c, q_p) \\ \text{s.t.} & p_g + p_c + p_p = 1, p_g, p_c, p_p \geq 0 \end{array}$$

ちなみに「囚人のジレンマ」は 2 人非ゼロ和ゲームです。

を解くことに対応します。この解は桜ちゃんの戦略 (q_g, q_c, q_p) に対する勘助君の最適反応戦略と呼ばれます。逆に、 $\Pi_{\text{勘助}}$ における (p_g, p_c, p_p) と (q_g, q_c, q_p) の役割を入れ替えることで、桜ちゃんの利得関数 $\Pi_{\text{桜}}$ が定義できて、勘助君の戦略 (p_g, p_c, p_p) が与えられているときに、LP

$$P_{\text{桜}}(p_g, p_c, p_p) \left| \begin{array}{ll} \max_{q_g, q_c, q_p} & \Pi_{\text{桜}}(q_g, q_c, q_p | p_g, p_c, p_p) \\ \text{s.t.} & q_g + q_c + q_p = 1, q_g, q_c, q_p \geq 0 \end{array} \right.$$

を解くことが桜ちゃんの最適反応戦略です。つまり、お互いがそれぞれ相手の戦略を所与とした最適化を行うという状況を考えます。

混合戦略の組 $((p_g^*, p_c^*, p_p^*), (q_g^*, q_c^*, q_p^*))$ がナッシュ均衡になっているというのは、

- (p_g^*, p_c^*, p_p^*) が LP $P_{\text{勘助}}(q_g^*, q_c^*, q_p^*)$ の最適解になっている
- (q_g^*, q_c^*, q_p^*) が LP $P_{\text{桜}}(p_g^*, p_c^*, p_p^*)$ の最適解になっている

ことを意味します。以下では1対の戦略の組 $((p'_g, p'_c, p'_p), (q'_g, q'_c, q'_p))$ が与えられたとき、桜ちゃんの戦略 (q'_g, q'_c, q'_p) に対する勘助君の最適反応戦略を求め、その最適値が $((p'_g, p'_c, p'_p), (q'_g, q'_c, q'_p))$ に対する利得から変わらないかどうかを調べます。

1. 図 8.3 のように、Excel シートを設定していきます。双行列のままでは扱い難いので、演習 8.1.1 と同じように、シート左側の列 B から G に勘助の利得表と戦略を、シートの右側の列 J から N に桜の利得表と戦略を記述します。

- セル範囲 D5:F7 に勘助君の利得を、セル範囲 L5:N7 に桜ちゃんの利得を入力します。
- セル範囲 B5:B7 を「変数セル」とし、勘助君の最適反応戦略（該当の選択肢を採用するとき“1”、しないとき“0”）を出力することにします。最適化問題の制約条件としてこれらの合計値が1となるようにするため、セル B8 に“=SUM(B5:B7)”と入力しておきます。
- セル範囲 D3:F3 に桜ちゃんの戦略が入るとして、G5:G7 に桜ちゃんの戦略を所与とした場合の勘助君の利得を入力します。具体的にはセル G5 に“=SUMPRODUCT(D5:F5, L\$3:N\$3)”と入力して、G6:G7 にコピーします。セル範囲 D3:F3 には桜ちゃん用の利得表の戦略の値（セル範囲 L3:N3）を反映するため、セル D3 に“=L3”と入力して、M3:N3 にコピーします。
- セル B3 に勘助君の期待利得を出力するため、“=SUMPRODUCT(B5:B6, F5:F6)”と入力します。
- 桜ちゃんについても戦略を入力します。セル範囲 J5:J7 に A の戦略を出力するために、J5 に“=B5”と入力し、J6:J7 にコピーします。
- セル範囲 L8:N8 に、勘助君の戦略を所与とした場合の桜ちゃんの利得を入力します。具体的にはセル L8 に“=SUMPRODUCT(\$J5:\$J7, L5:L7)”と入力して、M9:N8 にコピーします。
- セル J3 に桜ちゃんの（期待）利得を出力するため、“=SUMPRODUCT(L3:N3, L8:N8)”と入力します。

2. まず、勘助と桜が「チョキ」しか出さない場合 $((p'_g, p'_c, p'_p) = (q'_g, q'_c, q'_p) = (0, 1, 0))$ を考えてみましょう。B5:B7 と L3:N3 にそれぞれ 0,1,0 を入力します。同じ戦略を取っているので、両者の利得（セル B3 とセル J3）はいずれも“0”になっているはずです。この状態から勘助の利得が増加する戦略があるかどうかを確認します。

3. ソルバーを起動し、「ソルバーのパラメーター」を以下のように設定します。

- 「目的セル」はセル B3
- 「目標値」は「最大値」をチェック
- 「変数セル」としてセル範囲 B5:B7

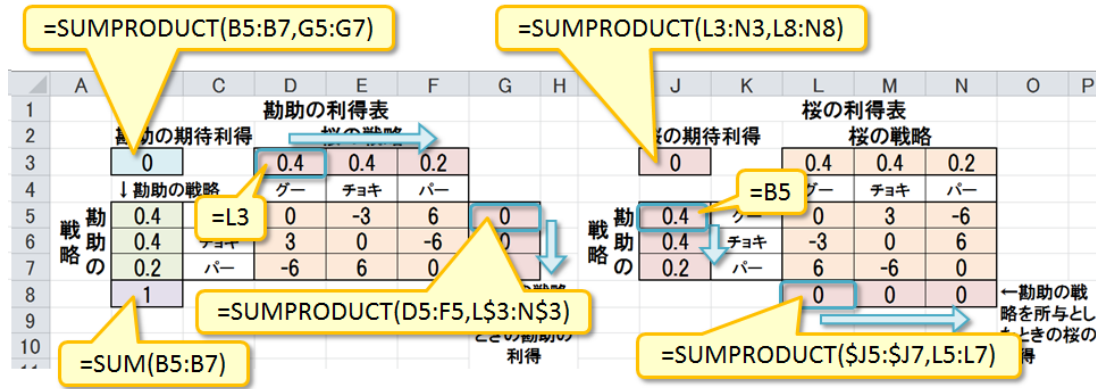


図 8.3: 勘助君の最適反応戦略を確認するための Excel シート

- 「制約条件」は $B8 = 1$
- 「制約のない変数を非負数にする」をチェック
- 「解決方法の選択」は「GRG 非線形」を選択します。

LP なので「シンプレックス LP」を選択するのが普通ですが、現在の解が最適解である場合に変更しないようにするために、敢えて非線形計画用のアルゴリズム「GRG」を選択します。

4. [解決] ボタンを押して、ソルバーを実行してください。すぐに最適解が見つかり、(当たり前ですが、) 勘助はパーを出し続ける戦略に変更すれば利得が“6”に増加することがわかります。この時点でお互いチョキを出し続けるという戦略の組はナッシュ均衡でないことがわかります。
5. 次に、両者が「グー、チョキ、パーを確率 $\frac{1}{3}$ ずつ出す戦略」をとる場合 $((p'_g, p'_c, p'_p) = (q'_g, q'_c, q'_p) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}))$ を考えてみます。セル範囲 B5:B7 とセル範囲 L3:N3 のセルそれぞれに “=1/3” と入力します。再び、両者の利得はいずれも “0” になっているはずですが。

先ほどと同様にソルバーを実行します。この結果もやはり勘助はより良い手としてグーを出し続けた方が(あるいは少なくとも少しグーを大目に出した方が)利得が改善することがわかります。すなわち、「グー、チョキ、パーを等確率で出し合う」のもナッシュ均衡でないことがわかります。

6. では両者が「グー、チョキ、パーをそれぞれ 40%, 40%, 20% ずつ出す戦略」をとる場合 $((p'_g, p'_c, p'_p) = (q'_g, q'_c, q'_p) = (0.4, 0.4, 0.2))$ はどうでしょうか? セル範囲 B5:B7 とセル範囲 L3:N3 それぞれに 0.4, 0.4, 0.2 と入力し、ソルバーを実行します。この結果、桜ちゃんがこの戦略を取り続ける限り、勘助君はこの戦略を変える誘因がないことが分かります。(言うまでもなく、桜ちゃんから見ても同じです。) したがって、お互いが「グー、チョキ、パーをそれぞれ 40%, 40%, 20% ずつ出す」戦略の組はナッシュ均衡であることが確認できます。

ちなみに 2 人ゼロ和ゲームでは、戦略を純粋戦略にとどめず混合戦略まで拡大することで、ナッシュ均衡が必ず存在することが言えます。また、より一般にはナッシュ均衡は 1 つとは限りません。そのように、複数の均衡が存在する場合に、どの均衡が実現されやすいかという議論も、ゲーム理論のトピックの 1 つです。そもそも「グー、チョキ、パーをそれぞれ 40%, 40%, 20% ずつ出す」という戦略をどのように見出すかについては、次の 8.2.2 節で検討します。

均衡選択で業績を残した J.C.Harsanyi と R.Selten は Nash と共にノーベル経済学賞を受賞しています。

8.2.2 max-min 戦略

この項では実際に例題 8.2.1 とは異なる 2 人ゼロ和ゲームを考え、ナッシュ均衡を与える max-min 戦略の導出を演習します。

例題 8.2.2 (整数選択ゲーム). 次のようなゲームを考える。AさんとBさんそれぞれが1から10までの整数が書かれたカード10枚を持っている。同時に手持ちのカードを出し合い、次のルールで得点を重ねていく。

- 数字が大きい方が負けで買った方に1万円払う
- 数字の差が1の場合は、数字が小さい方が負けで買った方に2万円払う
- 数字が等しい場合は引き分けて支払いは生じない

たとえば、Aさんが2、Bさんが5のカードをそれぞれ出したとすると、AさんがBさんから1万円もらう。もしAさんが4、Bさんが5の場合は、AさんがBさんに2万円払うというわけである。このとき、それぞれにとっての最適戦略を求めよ。

まずこのゲームの利得表が以下になることを確認してください。

		q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8	q_9	q_{10}
		↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p_1 \rightarrow$	1	(0, 0)	(-2, 2)	(1, -1)	(1, -1)	(1, -1)	(1, -1)	(1, -1)	(1, -1)	(1, -1)	(1, -1)
$p_2 \rightarrow$	2	(2, -2)	(0, 0)	(-2, 2)	(1, -1)	(1, -1)	(1, -1)	(1, -1)	(1, -1)	(1, -1)	(1, -1)
$p_3 \rightarrow$	3	(-1, 1)	(2, -2)	(0, 0)	(-2, 2)	(1, -1)	(1, -1)	(1, -1)	(1, -1)	(1, -1)	(1, -1)
$p_4 \rightarrow$	4	(-1, 1)	(-1, 1)	(2, -2)	(0, 0)	(-2, 2)	(1, -1)	(1, -1)	(1, -1)	(1, -1)	(1, -1)
$p_5 \rightarrow$	5	(-1, 1)	(-1, 1)	(-1, 1)	(2, -2)	(0, 0)	(-2, 2)	(1, -1)	(1, -1)	(1, -1)	(1, -1)
$p_6 \rightarrow$	6	(-1, 1)	(-1, 1)	(-1, 1)	(-1, 1)	(2, -2)	(0, 0)	(-2, 2)	(1, -1)	(1, -1)	(1, -1)
$p_7 \rightarrow$	7	(-1, 1)	(-1, 1)	(-1, 1)	(-1, 1)	(-1, 1)	(2, -2)	(0, 0)	(-2, 2)	(1, -1)	(1, -1)
$p_8 \rightarrow$	8	(-1, 1)	(-1, 1)	(-1, 1)	(-1, 1)	(-1, 1)	(-1, 1)	(2, -2)	(0, 0)	(-2, 2)	(1, -1)
$p_9 \rightarrow$	9	(-1, 1)	(-1, 1)	(-1, 1)	(-1, 1)	(-1, 1)	(-1, 1)	(-1, 1)	(2, -2)	(0, 0)	(-2, 2)
$p_{10} \rightarrow$	10	(-1, 1)	(-1, 1)	(-1, 1)	(-1, 1)	(-1, 1)	(-1, 1)	(-1, 1)	(-1, 1)	(2, -2)	(0, 0)

例題 8.2.1 の場合と同様に、各戦略の組合せの双方の利得合計が0で一定（つまり2人ゼロ和ゲーム）になっていることに注意してください。また、（これも例題 8.2.1 の場合と同様ですが）「囚人のジレンマ」のような、「相手の手に依らず、この手の方がこの手より良い」という支配戦略もありません。

そこで、ここではどの選択肢をとるかを確率的に決める混合戦略を考えます。すなわち、Aさんが「数値 k を出す」という手をとる確率を p_k とし、Aさんの戦略をベクトル $(p_1, \dots, p_{10})$ で表します。 $p_1 + \dots + p_{10} = 1, p_1, \dots, p_{10} \geq 0$ を満たします。

仮に $p_2 = 1, p_1 = p_3 = \dots = p_{10} = 0$ であれば、Aさんは「数値2を出す」という手のみを選択することになります。すなわち例題??の囚人のジレンマのときのように、確定的な手（純粋戦略）をとることを表します。このように混合戦略はより一般的な表現を与えてくれます。

同様に、Bさんの混合戦略を $(q_1, \dots, q_{10})$ で表します。ただし、 $q_1 + \dots + q_{10} = 1, q_1, \dots, q_{10} \geq 0$ を満たします。

このときAさんの（期待）利得 Π_A は次のように与えられます。

$$\begin{aligned} \Pi_A(p_1, \dots, p_{10}, q_1, \dots, q_{10}) &:= (2p_2 - p_3 - p_4 - \dots - p_{10})q_1 \\ &\quad + (-2p_1 + 2p_3 - p_4 - \dots - p_{10})q_2 \\ &\quad + \dots \\ &\quad + (p_1 + p_2 + \dots + p_8 - 2p_9)q_{10} \end{aligned}$$

もちろんBさんの混合戦略 $(q_1, \dots, q_{10})$ によって、Aさんの利得関数 Π_A はその形が変わります。しかし、 $(q_1, \dots, q_{10})$ を固定しなければ、戦略の立てようがありません。ここでは、BさんがAさんにとって最も都

合の悪い $(q_1, \dots, q_{10})$ を選んでくるとして、A さんはその最悪な場合でベストを尽くす（つまり、期待利益を最大化する）戦略をとるとします。このような戦略を **max-min 戦略**（マキシミン戦略、マックスミニ戦略、max-min strategy）と呼びます。この基準は次のように表現することができます。

$$\max_{(p_i)} \left\{ \min_{(q_j)} \left\{ \Pi_A(p_1, \dots, p_{10}, q_1, \dots, q_{10}) : \begin{array}{l} q_1 + \dots + q_{10} = 1, \\ q_j \geq 0, j = 1, \dots, 10 \end{array} \right\} : \begin{array}{l} p_1 + \dots + p_{10} = 1, \\ p_j \geq 0, j = 1, \dots, 10 \end{array} \right\} \quad (8.1)$$

まず A さんにとっての目的関数である “ $\min_{(q_j)} \Pi_A(p_1, \dots, p_{10}, q_1, \dots, q_{10})$ ” について考えましょう。これは、A さんの利得 Π_A を最も小さくする（A さんにとって、最も都合の悪い）B さんの混合戦略を見積もることに相当しています。B さんにとって、A さんの戦略 $(p_1, \dots, p_{10})$ が与えられた下で、 $\Pi_A(p_1, \dots, p_{10}, q_1, \dots, q_{10})$ が最小になるように $(q_1, \dots, q_{10})$ を求める問題です。

ここで、 $a_1 := 2p_2 - p_3 - p_4 - \dots - p_{10}$, $a_2 := -2p_1 + 2p_3 - p_4 - \dots - p_{10}$, $\dots$, $a_{10} := p_1 + p_2 + \dots + p_8 - 2p_9$ とおくと、

$$\min_{(q_j)} \Pi_A(p_1, \dots, p_{10}, q_1, \dots, q_{10}) = \begin{cases} \min_{(q_j)} & a_1 q_1 + \dots + a_{10} q_{10} \\ \text{s.t.} & q_1 + \dots + q_{10} = 1 \\ & q_1, \dots, q_{10} \geq 0 \end{cases}$$

という単純な LP になっていることが分かります。この LP を眺めて少し考えると、この最小値は $\min\{a_1, \dots, a_{10}\}$ に一致することがわかります。

したがって、(8.1) は

$$\max_{(p_i)} \min\{2p_2 - p_3 - p_4 - \dots - p_{10}, -2p_1 + 2p_3 - p_4 - \dots - p_{10}, \dots, p_1 + p_2 + \dots + p_8 - 2p_9\}$$

と書けます。この最適化問題は、自由変数 s を追加して、次の LP に帰着できます。

$$\begin{cases} \max_{s, (p_i)} & s \\ \text{s.t.} & s \leq 2p_2 - p_3 - p_4 - \dots - p_{10} \\ & s \leq -2p_1 + 2p_3 - p_4 - \dots - p_{10} \\ & \vdots \\ & s \leq p_1 + p_2 + \dots + p_8 - 2p_9 \\ & p_1 + p_2 + \dots + p_{10} = 1 \\ & p_1, p_2, \dots, p_{10} \geq 0 \end{cases}$$

すべての変数が非負数であるとした方が、Excel ソルバーを設定する上で簡単ですので、自由変数 s を 2 つの非負変数 s^+, s^- を使って置き換えます：

$$s = s^+ - s^-, s^+, s^- \geq 0$$

この式より、max-min 戦略を求めるために解くべき LP は以下のようになります。

$$\begin{cases} \max_{s^+, s^-, (p_i)} & s^+ - s^- \\ \text{s.t.} & s^+ - s^- \leq \begin{array}{cccccccc} 2p_2 & -p_3 & -p_4 & \dots & -p_8 & -p_9 & -p_{10} \\ -2p_1 & +2p_3 & -p_4 & \dots & -p_8 & -p_9 & -p_{10} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \\ & s^+ - s^- \leq \begin{array}{ccccccc} p_1 + p_2 & +p_3 + p_4 & + \dots & -2p_8 & & +2p_{10} \\ p_1 + p_2 & +p_3 + p_4 & + \dots & +p_8 & -2p_9 & & \\ p_1 + p_2 & +p_3 + p_4 & + \dots & +p_8 & +p_9 & +p_{10} & = 1 \end{array} \\ & s^+, s^-, p_1, p_2, \dots, p_{10} \geq 0 \end{cases} \quad (8.2)$$

演習 8.2.1. Excel ソルバーを用いて LP(8.2) を解き、A さんの max-min 戦略を求めよ。

- LP(8.2) を解くために、図 8.4 のように、Excel シートを設定します。セル範囲 B2:M2 に決定変数 $s_+, s_-, p_1, p_2, \dots, p_{10}$ を出力することにします。セル B3 を目的セルとし、“=B2-C2” と入力します。セル範囲 C3:C12 には (8.2) の不等式制約右辺の値を計算します。

このためにまずセル C3 に “=SUMPRODUCT(D\$2:M\$2, D3:M3)” と入力し、セル範囲 C4:C12 にコピーします。セル N2 に “=SUM(D2:M2)” と入力し、等式制約の左辺 $p_1 + p_2 + \dots + p_{10}$ を計算します。

2. 続いソルバーを起動し、「ソルバーのパラメーター」で次のように設定します。

- 「目的セル」はセル B3
- 「目標値」は「最大値」をチェック
- 「変数セル」として B2:M2
- 「制約条件」は
 - C3:C12 >= B3
 - N2 = 1
- 「制約のない変数を非負数にする」をチェック
- 「解決方法の選択」は「シンプレックス LP」

[解決] をクリックすると、間もなく最適解が得られ終了します。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
		s_+	s_-	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}	
1														
2														
3														
4														
5														
6														
7														
8														
9														
10														
11														
12														

目的セルの設定 (T)

目標値: ☒ 最大値 (M) ☐ 最小値 (L)

変数セルの変更 (B)
\$B\$2:\$M\$2

制約条件の対象 (U)
\$C\$3:\$C\$12 >= \$B\$3
\$N\$2 = 1

☒ 制約のない変数を非負数にする (G)

解決方法の選択 (E)

(a) Excel シート

(b) 「ソルバーのパラメーター」

図 8.4: 整数選択ゲームの max-min 戦略計算用の設定

3. この結果、 $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, \dots, p_{10}, s_+, s_-) = (0.0625, 0.3125, 0.25, 0.3125, 0.0625, 0, \dots, 0, 0, 0)$ なる解で最適値 “0” が得られます。つまりこのゲームの max-min 戦略は 1 と 5 をそれぞれ $\frac{1}{16}$ 、2 と 4 をそれぞれ $\frac{5}{16}$ 、3 を $\frac{4}{16}$ の確率で出すというものです。ゲームの利得構造が対称なので、お互いがこの手を出し合えばその期待値（最適値）が 0 であることは驚くことではないでしょう。しかし、この戦略はゲームのルールを変えて整数の範囲を「10 までの整数」としようが、「100 までの整数としよう」が変わりません。

文献 [1] によれば、「1 以上の任意の整数」というルールでも成り立ちます。

ちなみに通常のじゃんけんの max-min 戦略を考えると、「グー」「チョキ」「パー」をそれぞれ $\frac{1}{3}$ で出すという尤もらしい（ある意味、つまらない）解になります。その事実と比べると、上の戦略は直観的ではないでしょう。実際、何度も繰り返してみるとよいでしょう。

LP の双対定理を用いると、A さんの max-min 戦略にとって最も都合の悪い B さんの戦略が、実は B さんの max-min 戦略であることが示せます。また、2 人が同時に max-min 戦略をとることが、このゲームのナッシュ均衡になっていることも示せます。これらの性質は 2 人のプレイヤーの利得の和が常に 0 であるすべてのゲームについて成り立つことが知られています。

演習 8.2.2 (勘助君と桜ちゃんのナッシュ均衡). 例題 8.2.1 の勘助君と桜ちゃんのじゃんけんゲームの max-min 戦略を求め、それがナッシュ均衡であった $((p_g^*, p_c^*, p_p^*), (q_g^*, q_c^*, q_p^*)) = ((0.4, 0.4, 0.2), (0.4, 0.4, 0.2))$ となることを確認せよ。

勘助君と桜ちゃんの混合戦略 $(p_g, p_c, p_p), (q_g, q_c, q_p)$ として、勘助君の max-min 戦略は

$$\max_{(p_i)} \left\{ \min_{(q_j)} \left\{ \Pi_{\text{勘助}}(p_g, p_c, p_p, q_g, q_c, q_p) : \begin{array}{l} q_g + q_c + q_p = 1 \\ q_g, q_c, q_p \geq 0 \end{array} \right\} : \begin{array}{l} p_g + p_c + p_p = 1 \\ p_g, p_c, p_p \geq 0 \end{array} \right\}$$

の最適解として得られます。したがって、解くべき LP は以下ようになります。

$$\begin{array}{ll}
 \max_{s_+, s_-, (p_i)} & s_+ - s_- \\
 \text{s.t.} & s_+ - s_- \leq -3p_c + 6p_p \\
 & s_+ - s_- \leq 3p_g - 6p_p \\
 & s_+ - s_- \leq -6p_g + 6p_c \\
 & p_g + p_c + p_p = 1 \\
 & s_+, s_-, p_g, p_c, p_p \geq 0
 \end{array}$$

これをソルバーで解くと、 $(p_g, p_c, p_p) = (0.4, 0.4, 0.2)$ が得られます。勘助君と桜ちゃんの立場は対称なので桜ちゃんにとっての max-min 戦略も $(q_g, q_c, q_p) = (0.4, 0.4, 0.2)$ となります。これらの混合戦略の組合せはナッシュ均衡になります。また、この混合戦略はお互いに相手の利得を最悪にする (min) を達成するものになっていて、双対問題の解に対応付けることができます。

詳しくは専門書をご覧ください。とりあえず演習 8.1.1 や例題 8.2.1 のようにすることで確認できます。

実際、「感度レポート」の潜在価格の欄を見ると (符号違いで) お互いの max-min 戦略が得られていることが確認できます。

演習 8.2.3 (PK におけるゲーム理論)。サッカー選手の大空と若林はライバルチームに所属するエース・ストライカーとゴール・キーパーである。小学生のときは同じチームでプレーしたこともあり、お互いの手の内を熟知している。そんな二人が優勝をかけたペナルティ・キック (PK) 戦で対戦することになった。大空はゴールのどこ (「左」 or 「真ん中」 or 「右」) に蹴るのか、またどんな蹴り方 (「ズドンと豪快なキック」 or 「ころころと相手を馬鹿にする緩いキック」) をするかで 6 つの選択肢を有する。一方、若林はどの方向 (「左」 or 「真ん中」 or 「右」) に動くかで 3 つの選択肢を有する。PK の結果得られる満足度が、表のような双行列形式で与えられるとき、それぞれの max-min 戦略を求めよ。

		若林		
		右	中	左
大空	ころころ右	(0, 1)	(1, 0)	(1, 0)
	ズドンと右	(0.3, 0.7)	(0.9, 0.1)	(0.9, 0.1)
	ころころ中	(0.8, 0.2)	(0, 1)	(0.9, 0.1)
	ズドンと中	(0.8, 0.2)	(0.1, 0.9)	(0.9, 0.1)
	ころころ左	(1, 0)	(1, 0)	(0, 1)
	ズドンと左	(0.8, 0.2)	(0.7, 0.3)	(0.6, 0.4)

これまでの 2 つの例題と同様、2 人の利得合計は常に “1” で一定ですが、例題 8.2.2 と演習 8.2.2 と異なり、2 人のプレイヤーの選択肢が異なっていて対称な関係になっていません。しかし、それぞれの max-min 戦略は同様の手続きで求めることができます。

結果、大空の max-min 戦略は

選択肢	ころころ右	ズドンと右	ころころ中	ズドンと中	ころころ左	ズドンと左
確率	0	0.217	0	0.0870	0	0.696

となり、ころころシュートを避け、左、右、中の順に大きな確率で強いキックをする戦略になります。このとき期待得点は 0.6913 となります。

一方、若林の max-min 戦略は

選択肢	右	中	左
確率	0.348	0.217	0.435

となり、期待得点は 0.3087 となります。これがナッシュ均衡かどうかは、演習 8.1.1 や演習 8.2.2 と同様にして確認することができます。

やはり PK はキッカーの方が有利なようです。

8.3 繰り返しゲームと限定合理性

前節までに見てきたゲームは、各プレイヤーが利用可能な情報を完全に把握した上で合理的に意思決定を行うモデルでした。そのような理論・方法論は、ともすれば非合理的になりがちな意思決定をより合理的なものとする上では非常に有用でしょう。実際、整数選択ゲームでは（ある意味）最良の手を見つけることができました。

一方で、経済学などの分野では、このような合理的な考え方が現実社会でも「行われている」と仮定して、社会・経済の諸活動のモデル化を進めるという目的で用いられることも数多くなされてきました。しかし、「現実の人間の行動はそこまで単純な合理的モデルで説明することができない」という事実が心理学や実験を通して示され、現在ではかなり勢いを得ているというのが現状です。人間（ときとして生物全般）の行動の相互作用をゲーム理論で記述しようという立場に立つと、モデルを修正する必要に迫られることになります。そのような試みの1つが、繰り返しゲームや限定合理性の導入です。これは囚人のジレンマのように単発の意思決定だけでなく、囚人のジレンマを無限に繰り返すような状況で変化がもたらされるかといった議論や、プレイヤーが部分的な記憶しか有しない場合の議論を指します。

この節では特に、何度も繰り返すような状況でどのような戦略が有利かをシミュレーションを通して実験します。

例題 8.3.1. 再び囚人のジレンマ的な利得構造を考えよう。ただし、今度は毎日何度も繰り返し同じゲームが繰り返されるとする。つまり、2人のプレイヤー A と B が毎朝「協力」か「非協力」をそれぞれ情報交換なしに選ぶ。その結果夕方に 2 人が得た利得が支払われるとする。ここでは以下のような利得行列を持っていて、それぞれ完全にこの利得を理解しているとする。

		B	
		協力 (1)	非協力 (2)
A	協力 (1)	(4, 4)	(0, 8)
	非協力 (2)	(8, 0)	(2, 2)

ここではこれを 200 回繰り返すとする。（ゲーム理論的な合理性を仮定すると、有限回の繰り返しを行う「囚人のジレンマ」では常に「非協力」が選択されることが示される。）

次に挙げる 6 つの戦略に（同じ戦略同士の対戦も含めた）総当たり方式でこの繰り返し「囚人のジレンマ」を戦わせ、その平均獲得利得を比較せよ。

1. 「常に協力」戦略 … 毎回「協力」(1) を選択し続ける
2. 「常に非協力」戦略 … 毎回「非協力」(2) を選択し続ける
3. 「協力-おうむ返し」戦略 … 初回「協力」(1) を選択し、その後は前回相手の出したものと同じ手を出す
4. 「非協力-おうむ返し」戦略 … 初回「非協力」(2) を選択し、その後は前回相手の出したものと同じ手を出す
5. 「トリガー」戦略 … 初回「協力」(1) を選択し、その後は前回までに 1 回でも相手が「非協力」を出せば「非協力」を出し続ける
6. 「ランダム」戦略 … 毎回確率 50% で「協力」、確率 50% で「非協力」を出す

1. まず、いくつかの対戦はシミュレーションをするまでもなく結果を簡単に計算できることに注意してください。たとえば、「1. 常に協力」と「2. 常に非協力」の対戦では前者が 0、後者が 8 点を毎回得ます。表 8.2 は対戦表を表しています。右上半分の 21 対戦を考えますが、1 から 11 の数字の振られている対戦だけシミュレーションをすれば十分です。実は、「2. 常に非協力」と「5. トリガー」の対戦なども、シミュレーションする必要はないのですが、簡単のためシミュレーションで平均利得を計算してみます。

表 8.2: 戦略の対戦表

	1. 常に協力	2. 常に非協力	3. 協力-おうむ返し	4. 非協力-おうむ返し	5. トリガー	6. ランダム
1. 常に協力				9		1
2. 常に非協力			11		7	2
3. 協力-おうむ返し				10		3
4. 非協力-おうむ返し					8	4
5. トリガー						5
6. ランダム						6

2. まず図 8.5(a) のように、セル範囲 F3:G4 にプレイヤー A の利得表、セル範囲 K3:L4 にプレイヤー B の利得表を分けて記入しておきます。

また「6. ランダム」戦略用の乱数としてセル範囲 B11:C210 に一様乱数 $U(0,1)$ を発生させておきます。このために「データ分析」の「乱数発生」を起動し、表 8.5(b) のように入力します。

列 c の方は「6. ランダム」戦略同士の対戦用です。

3. 続いて図 8.5(a) のように、列 E より右側の範囲に 1 つの対戦につき 4 列を使って 11 の対戦のシミュレーションを行っていきます。

まず、1 番目の対戦「1. 常に協力」戦略 vs. 「6. ランダム」戦略のシミュレーションです。列 E に「1. 常に協力」の選択を入力します。常に「協力」なので、セル E11 に“1”を入力します。

列 F に「6. ランダム」の選択を入力します。セル F11 に“=IF(\$B11<0.5,1,2)”と入力します。

4. 続いて各プレイヤーの獲得利得を計算します。まず A の獲得利得を出力するために、セル G11 に“=INDEX(\$F\$3:\$G\$4,E11,F11)”と入力します。次に B の獲得利得を出力するために、セル H11 に“=INDEX(\$K\$3:\$L\$4,E11,F11)”と入力します。

セル範囲 E11:H11 を、その下のセル範囲 E12:H210 にコピーします。

5. 同様に、2 番目の対戦「2. 常に非協力」vs. 「6. ランダム」のシミュレーションを列 J から列 M に行います。常に非協力の選択 (列 J) を“2”とする以外は、1 番目の対戦と同様です。

列 K から列 M については絶対参照を正しく指定していれば、コピーで十分です。

Figure 8.5(a) displays the payoff tables and simulation setup. The payoff tables for Player A and Player B are shown. The simulation table includes columns for strategy selection (A, B) and payoff calculation (A, B). The formulas for selecting strategies and calculating payoffs are highlighted in yellow boxes.

(a) 利得表を別々に記述しておく

Figure 8.5(b) shows the 'Random Number Generation' dialog box. The settings are: Number of variables (2), Number of random numbers (200), Distribution (均一), Parameters (0 から 1 まで), Random seed (101), and Output options (出力先: \$B\$11).

(b) 疑似乱数を 2 列分発生させる

図 8.5: 繰り返しゲームのシミュレーションのための準備

6. 次に 3 番目の対戦「3. 協力-おうむ返し」vs. 「6. ランダム」です。「3. 協力-おうむ返し」のために、セル O11 に“1”を入力、O12 に“=IF(P11=1,1,2)”と入力します。これ以降のセル範囲 O13:O210 には O12 の内容をコピーします。列 P から列 R については、これまでの対戦と同様ですので、たとえば 2 番目の対戦の列 K から列 N の行 11 以下をコピーすれば十分です。

7. 4 番目の対戦「4. 非協力-おうむ返し」vs.「6. ランダム」は、3 番目の対戦と同様にできます。違いは1 回目の「4. 非協力-おうむ返し」選択（セル T11）を“1”（協力）でなく、“2”（非協力）とする点です。
8. 5 番目の対戦「5. トリガー」vs.「6. ランダム」のポイントは「5. トリガー戦略」の選択の入力です。トリガー戦略の1 回目（セル Y11）は“1”（協力）を選択します。2 回目以降は、それまでに相手がずっと「協力」（“1”）を選択しているときのみ“1”、1 度でも「非協力」（“2”）を選択したならば以降ずっと「非協力」（“2”）をとります。そのために、セル Y12 に“=IF(PRODUCT(Z\$11:Z11)=1,1,2)”と入力し、セル範囲 Y12:210 にコピーします。ここで、関数 PRODUCT(配列) は配列の中身の掛け算を返す関数ですので、“PRODUCT(Z\$11:Z11)”は相手がそれまでにずっと“1”を続けたときのみ“1”を返します。
9. 6～11 番目の対戦についても同様に作成してってください。

	A	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG
6																					
7																					
8																					
9																					
10	no.																				
11	1																				
12	2																				
13	3																				
14	4																				

図 8.6: 3 番目から 6 番目の対戦のシミュレーション

10. 11 の対戦のシミュレーションができれば、得られた得点の平均を計算します。図 8.7 では行 212 に関数 AVERAGE を使って平均値を求めています。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
6																		
7																		
8																		
9																		
10	no.																	
11	197																	
12	198																	
13	199																	
14	200																	
15	201																	
16	202																	
17	203																	
18	204																	
19	205																	
20	206																	
21	207																	
22	208																	
23	209																	
24	210																	
25	211																	
26	212																	

図 8.7: 利得の平均値を計算する

11. 表 8.3 は各対戦の獲得利得の平均値をまとめたものです。なお、「6. ランダム」同士の対戦の平均値は、双方の平均利得の平均値を採用しています。表の右 3 列は対戦相手が、「協力」「非協力」を無条件に出し続ける戦略 1. と 2. を除いた「3.～6.」に対する平均、「協力」を出し続ける戦略 1. を除いた無条件に「協力」「非協力」を除いた「2.～6.」に対する平均、すべての対戦に対する平均を示しています。

ここから次のことがわかります。

- 囚人のジレンマでナッシュ均衡を達成する「2. 常に非協力」戦略は、繰り返しの状況で平均的には必ずしも優れていない。

- 最も平均利益が優れているのは「3. 協力-おうむ返し」戦略である。
- おうむ返し戦略の中でも初めに「協力」(3.) するか、「非協力」(4.) するかで平均値が大きく異なる。これは相手が協力の意思を示したら協力する戦略が3つ含まれていること、特に「5. トリガー」戦略のように1回の「非協力」も許さない戦略があるのが効いている。
- 「2. 常に非協力」戦略は「1. 常に協力」戦略という超お人好し戦略に対して高得点をたたき出すので、全対戦平均は高いものの、それを除いた平均ではかなり低くなっている。
- 「5. トリガー」戦略は一度トリガーが引かれて「非協力」を選択すると、そのまま「非協力」を改めないため、1. や 6. という、相手の手に依存させない戦略からは高得点を稼ぐものの、相手の手に依存する戦略に対しては低い得点しか得られない。
- 「6. ランダム」戦略は最低の得点しか獲得できない。(つまり相手が頭を使う限り、頭を使わないと駄目であるということ!?)

単純に有限回囚人のジレンマを繰り返す場合、各回で支配戦略の考え方をを使うと「2. 常に非協力」が合理的となります。しかし、このようなより現実的な感覚に近い枠組みで実験してみると、「3. 協力-おうむ返し」戦略のように、まず1歩譲って「協力」し、その後は相手が「協力」の態度を示せば「協力」、「非協力」の態度を示せば「非協力」という戦略が全体的に優れた結果を示すのです。

この結果は社会を生きていく上で重要な示唆を与えてくれる気がします。

表 8.3: 平均獲得利得のまとめ

		対戦相手						平均利得		
		1. 常に協力	2. 常に非協力	3. 協力-おうむ返し	4. 非協力-おうむ返し	5. トリガー	6. ランダム	3〜6対戦	2〜6対戦	全対戦
戦 略	1. 常に協力	4.000	0.000	4.000	3.980	4.000	2.060	3.510	2.808	3.007
	2. 常に非協力	8.000	2.000	2.030	2.000	2.030	5.090	2.788	2.630	3.525
	3. 協力-おうむ返し	4.000	1.990	4.000	4.000	4.000	3.540	3.885	3.506	3.588
	4. 非協力-おうむ返し	4.020	2.000	4.000	2.000	2.020	3.560	2.895	2.716	2.933
	5. トリガー	4.000	1.990	4.000	2.020	4.000	5.060	3.770	3.414	3.512
	6. ランダム	5.940	0.970	3.540	3.520	1.020	2.840	2.730	2.378	2.972

8.4 協力ゲームと合理的な配分

この章ここまでは、複数の意思決定者（プレーヤー）の選択の相互の影響を分析する道具として分析する非協力ゲームを扱ってきました。既に少し触れましたが、近年のゲーム理論のメインストリームは非協力ゲームが主体です。

しかし、非協力ゲームでは何も協力しないわけではありません。どのようなときに協力の余地があるか、あるいはそういう余地が存在するときに、協力に対する報酬や費用の（再）配分の余地について考えるための土台も、古くからゲーム理論の研究者が考えてきた問題です。そのような土台を提供する枠組みは**協力ゲーム**（cooperative game）と呼ばれます。非協力ゲームと相反するものを連想させる名前ですが、両者は相反するものではなく、交渉ゲームなどを通じて結びつき、お互いに補完する内容を提供してくれます。本書では交渉ゲームについて割愛するのでその結びつきについて詳細を述べませんが、プレイヤー同士の協力関係（提携と言います）が成り立つための条件と、成り立つ場合にどのような報酬の配分が合理的かについて、基本的なアイデアを学びます。

8.4.1 コアと ε -コア

例題 8.4.1 (取り分の配分). ルパンと次元と石川の 3 名は旧知の泥棒仲間である。久しぶりに 3 人で大きな仕事（ヤマと読む）に挑む算段をしているところである。ルパンは全体的な計画策定に比類ない才能を有し、次元は銃器の扱いで右に出るものがない。石川はどんなものも切れるという噂の刀剣で銃器以上の攻撃と防御能力を有している。

彼らはそれぞれ単独でも、任意の 2 名ずつで組んでも仕事はできるが、3 名で取り組むのに比べるとずっと無難な仕事で済ます必要があり、その報酬はぐっと小さくなる。実際、彼らが想定したそれぞれの組合せで得られる利得は以下の表のとおりである（単位は [億円]）。

ルパン単独	1.0	次元単独	0.8	石川単独	0.7
ルパンと次元	1.8	ルパンと石川	5.0	次元と石川	2.0
ルパンと次元と石川	10.0				

さて、彼ら 3 人で挑むこの仕事で得られた金額はどう配分すべきだろうか？

「ルパン単独」とか「ルパンと次元」といったプレーヤー同士の組合せを**提携** (coalition) と言い、例題の表のように「提携毎にどのような利得が得られるのか」の対応を表したものを**特性関数** (characteristic function) と言います。ここでは、与えられた特性関数の情報を基に、3 名の配分がどうあるべきかを考えます。

まず、ルパンを L、次元を J、石川を I と表し、提携を $\{L\}$ (ルパン単独)、 $\{L, J\}$ (ルパンと次元) の様に表します。さらに、3 人の配分額を x_L, x_J, x_I と表します。3 人で 10 [億円] 得られるので、これらを山分けするのが合理的です。したがって、

$$x_L + x_J + x_I = 10 \quad (8.3)$$

を満たすでしょう。

また、各個人は、「自分が受け取る配分が、自分 1 人で働いた場合の取り分以上となる」ことを要求すると考えられます。たとえば、次元は $x_J \geq 0.8$ であることを要求するはずです。なぜならば、そうでない（つまり、 $x_J < 0.8$ ）とすると、次元は自分 1 人で仕事をした方が 3 名で協力する結果 x_L より良いということになるからです。

同様に、2 名で組む場合も、その 2 人の配分合計が、2 人の特性関数値以上になっている必要があります。たとえば、ルパンと次元は $x_L + x_J \geq 1.8$ であることを要求するはずです。

3 人の状況でこれらの条件をすべて書き出すと以下ようになります。

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_L \geq 1.0 & \Leftrightarrow \text{ルパンが離脱する誘因がない} \\ x_J \geq 0.8 & \Leftrightarrow \text{次元が離脱する誘因がない} \\ x_I \geq 0.7 & \Leftrightarrow \text{石川が離脱する誘因がない} \\ x_L + x_J \geq 1.8 & \Leftrightarrow \text{ルパンと次元 2 人が離脱する誘因がない} \\ x_L + x_I \geq 5.0 & \Leftrightarrow \text{ルパンと石川 2 人が離脱する誘因がない} \\ x_J + x_I \geq 2.0 & \Leftrightarrow \text{次元と石川 2 人が離脱する誘因がない} \end{array} \right.$$

このように、任意の部分提携 $S \subseteq \{L, J, I\}$ に対して、配分 (x_L, x_J, x_I) は

$$\sum_{j \in S} x_j \geq v(S)$$

を満たすことが要求されるはずです。ただし、 v は特性関数を表し、元々提携 S で得られる（はずの）利得を $v(S)$ で表すとしします。

まとめると、以下の条件を満たすことが配分 (x_L, x_J, x_I) に要求されます。

$$\left\{ \begin{array}{l} x_L + x_J + x_I = v(\{L, J, I\}) (= 10) \\ \text{すべての } S \subsetneq \{L, J, I\} \text{ に対して、} \sum_{j \in S} x_j \geq v(S) \end{array} \right.$$

泥棒の話なのに公正な配分とは、こはいかに？

この条件を満たす配分 (x_L, x_J, x_I) の集合を**コア** (core) と言います。3 人の配分を考える場合、図 8.8 のように、三角形上の点として配分を表現することができます。

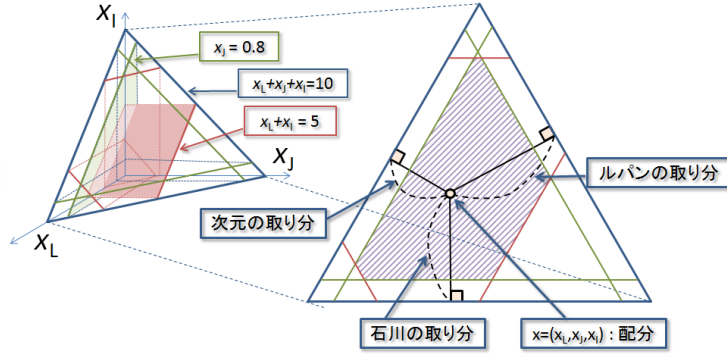


図 8.8: 3 名の配分と三角形上の表現

コアはすべてのプレイヤーが提携する動機を持つために配分が満たすべき条件を示しています。与えられた特性関数 v によっては空集合 $\emptyset$ にもなります。逆に、図 8.8 のように、無限個の配分案を含むこともあります。その場合、コアの条件に合理的な規準や条件を追加して、より少ない配分案に絞ることが望まれる場合もあります。

ε -**コア** (ε -core) は、パラメーター ε を導入してコアを一般的な形に拡張したものです。

$$C(\varepsilon) := \left\{ (x_L, x_J, x_I) : \begin{array}{l} x_L + x_J + x_I = v(\{L, J, I\}) (= 10) \\ \text{すべての } S \subsetneq \{L, J, I\} \text{ に対して、} \varepsilon + \sum_{j \in S} x_j \geq v(S) \end{array} \right\}$$

$\varepsilon = 0$ とした $C(0)$ はコアと一致します。この意味で、 ε -コアはコアを一般化した概念とみなせます。

また、コアが存在しない場合でも、十分大きく ε をとることで $C(\varepsilon)$ は存在します。ただし、そのような場合は全員の提携が崩れる動機を持つことになります。

逆に、 ε を小さくしていくと、 $C(\varepsilon)$ も小さくなっていくので、コアが複数の配分を含む場合に、その配分案を限定することができます。特に、コアが存在する範囲で、最も小さい ε を達成する $C(\varepsilon)$ は**最小 ε -コア** (least ε -core) と呼ばれ、次の LP を解くことで求めることができます。

$$\begin{array}{ll} \min_{\mathbf{x}, \varepsilon} & \varepsilon \\ \text{s.t.} & \varepsilon + \sum_{j \in S} x_j \geq v(S) \quad S \subsetneq N \\ & \sum_{j \in N} x_j = v(N) \end{array} \quad (8.4)$$

ただし、 $N := \{L, J, I\}$ 、つまり 3 人全員の提携とします。この LP は

$$\min_{\mathbf{x}} \left\{ \max_S \left\{ v(S) - \sum_{j \in S} x_j : S \subsetneq N \right\} : \sum_{j \in N} x_j = v(N) \right\}$$

と等価です。

ここで $e(S) := v(S) - \sum_{j \in S} x_j$ は提携 S の**不満** (excess demand, regret) と言います。もしある配分 $\mathbf{x}$ に対して、正の不満を抱く部分提携 S があれば、その提携 S は全員の提携 N から抜け出す動機を持つことになります。LP (8.4) は任意の部分提携が抱く不満の中で最も大きい不満が最小になるように配分 $\mathbf{x}$ を見つける基準となっています。したがって、(8.4) の最適値が正であれば、どんな配分に対しても、少なくとも 1 つは提携 N から抜け出す動機を持つため、コアが存在しないことを意味します。

演習 8.4.1. ルパン、次元、石川の配分に関して、最小 ε -コアを求めよ。

- 図 8.9(a) のように Excel シートにデータを入力します。列 A に提携 S 、列 B に特性関数の値 $v(S)$ のデータを入力しています。セル範囲 D8:F8 に決定変数のうち x_L, x_J, x_I 、セル G8 に ε をそれぞれ出力することになります。それに対応してセル範囲 D2:G7 に LP の係数行列を入力しています。
- その上で、セル範囲 C2:C8 に LP(8.4) の制約式左辺を出力するようにします。具体的には、
 - セル C2 に “=SUMPRODUCT(D\$8:G\$8,D2:G2)” と入力して範囲 C3:C7 にコピーします。これで部分提携に関する式 $\varepsilon + \sum_{j \in S} x_j$ を計算します。
 - セル C8 に “=SUM(D8:F8)” と入力します。これは $\sum_{j \in N} x_j$ を計算します。
- また、参考までにセル範囲 H2:H7 に各部分提携の不満 $e(S)$ を出力するため、セル H2 に “=B2-C2+G\$8” と入力して H3:H7 にコピーします。（この範囲の設定は行わなくても最適化を行う上で支障はありません。）
- 続いて、ソルバーを起動し、「ソルバーのパラメーター」の設定を行います。
 - 「目的セル」はセル G8
 - 「目標値」は「最小値」をチェック
 - 「変数セル」として D8:G8
 - 「制約条件」は
 - B2:B7 <= C2:C7
 - B8 = C8
 - 「制約のない変数を非負数にする」のチェックを（入っていれば）外す
 - 「解決方法の選択」は「シンプレックス LP」

[解決] をクリックすると、間もなく最適解が得られ終了します。

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	S	$v(S)$	$\varepsilon + \sum_{j \in S} x_j$	ルパン(L)	次元(J)	石川(I)		不満
2	L	1.0	-2.1	1			1	1.0
3	J	0.8	-2.1		1		1	0.8
4	I	0.7	-2.1			1	1	0.7
5	LJ	1.8	-2.1	1	1		1	1.8
6	JI	2.0	-2.1		1	1	1	2.0
7	IL	5.0	-2.1	1		1	1	5.0
8	LJI	10.0	0				-2.1	
9			$\sum_{j \in N} x_j$	x_L	x_J	x_I	ε	

目的セルの設定(I)

目標値: ☐ 最大値(M) ☒ 最小値(m)

変数セルの変更(E)

制約条件の対象(L)

☐ 制約のない変数を非負数にする(S)

解決方法の選択(E)

(a) Excel シート

(b) 「ソルバーのパラメーター」

図 8.9: 「ルパン」「次元」「石川」の最大不満最小配分計算用の設定

- 下の表 (a), (b) は得られた配分案とそのときの部分提携 S の不満 $e(S)$ を表しています。これより、配分は石川が 4 で最も多く、次いで、ルパンの 3.1、次元の 2.9 となっています。独力で得られる利得では最も低い石川が最も多く獲得できています。

また、不満が大きいの「ルパン」「次元」「次元と石川」の 3 つの提携ですが、それでも “-2.1” とマイナスの不満になっていることがわかります。最大の不満がマイナスとなっていることから、コアが空でないこともわかります。

(a) 最小 ε -コア			(b) 部分提携の不満						
ルパン (L)	次元 (J)	石川 (I)	提携 S	L	J	I	LJ	JI	IL
3.1	2.9	4	不満 $e(S)$	-2.1	-2.1	-3.3	-4.2	-4.9	-2.1

プレイヤーが 4 人以上になった場合には図 8.8 のように視覚的に表現することが難しくなりますが、コアの定義や最小 ε -コアの計算はそのまま拡張して行えます。

演習 8.4.2 (4 人の配分). 敏腕音楽プロデューサー つんこ♀ (T)、シンガーソングライター 拓田吉朗 (Y)、ミュージカル俳優 アーラン K (A)、米国の伝説的ラッパー $Jay-G$ (J) の 4 人のアーティストがコラボレーションにより楽曲を作成し、日本でリリースすることを考えている。それぞれの提携で楽曲を作成した場合の利益の取り分が、特性関数として、以下のように表されている。このときコアが存在するかどうか判定しなさい。

S	$v(S)$	S	$v(S)$	S	$v(S)$	S	$v(S)$
T	0	Y	3	A	1	J	0.5
T, Y	4	T, A	1.5	T, J	5		
Y, A	2	Y, J	2.5	A, J	3		
T, Y, A	7	T, Y, J	8	T, A, J	8.5	Y, A, J	6
T, Y, A, J	10						

T, Y, A, J それぞれの配分を x_T, x_Y, x_A, x_J として、例題 8.4.1 と同様の要領で ε -コアを求める LP を定式化すると

$$\begin{array}{ll}
 \min_{\mathbf{x}, \varepsilon} & \varepsilon \\
 \text{s.t.} & \varepsilon + x_T \geq 0.0 (= v(\{T\})) \\
 & \varepsilon + x_Y \geq 3.0 (= v(\{Y\})) \\
 & \varepsilon + x_A \geq 1.0 (= v(\{A\})) \\
 & \varepsilon + x_J \geq 0.5 (= v(\{J\})) \\
 & \varepsilon + x_T + x_Y \geq 4.0 (= v(\{T, Y\})) \\
 & \varepsilon + x_T + x_A \geq 1.5 (= v(\{T, A\})) \\
 & \varepsilon + x_T + x_J \geq 5.0 (= v(\{T, J\})) \\
 & \varepsilon + x_Y + x_A \geq 2.0 (= v(\{Y, A\})) \\
 & \varepsilon + x_Y + x_J \geq 2.5 (= v(\{Y, J\})) \\
 & \varepsilon + x_A + x_J \geq 3.0 (= v(\{A, J\})) \\
 & \varepsilon + x_T + x_Y + x_A \geq 7.0 (= v(\{T, Y, A\})) \\
 & \varepsilon + x_T + x_Y + x_J \geq 8.0 (= v(\{T, Y, J\})) \\
 & \varepsilon + x_T + x_A + x_J \geq 8.5 (= v(\{T, A, J\})) \\
 & \varepsilon + x_Y + x_A + x_J \geq 6.0 (= v(\{Y, A, J\})) \\
 & x_T + x_Y + x_A + x_J = 10.0 (= v(\{T, Y, A, J\}))
 \end{array}$$

となります。これをソルバーで解くと、最小 ε -コアに基づく配分は $(x_T, x_Y, x_A, x_J) = (4.75, 2.25, 0.25, 2.75)$ となりますが、最適値が 0.75 と正になるので、コアは存在しないことがわかります。

また、列 H の値が正の提携は、得られた最小 ε -コア（に属する配分）において、全員提携から離脱する動機を持つことになります。

利益でなく費用の配分にも適用可能です。

演習 8.4.3 (タクシーの便乗の支払い). 同じ職場の *Akiko* と *Bob* と *Cecile*。終電がなくなってしまったため、自腹でタクシーを使って帰ることにした。多少自宅の方向が違うので、色々な便乗の可能性が考えられる。表はその想定される料金である。

便乗パターン	料金	便乗パターン	料金	便乗パターン	料金
A	3,500	B	5,000	C	10,000
A,B	8,000	B,C	12,000	C,A	12,000
A,B,C	14,000				

それぞれが単独で帰る場合のコストの合計を該当の提携のコストから引いた値を利得として特性関数を構成し、その得する分の配分について、最小 ε -コアを求めよ。たとえば A, B 2人からなる提携 $\{A, B\}$ の特性関数値 $v(\{A, B\})$ は、 A と B がそれぞれが単独で帰った場合のコストの合計 $3,500 + 5,000 = 8,500$ から 2人で帰った場合のコスト 8,000 を引いた 500 となる。

特性関数をまとめると

S	$v(S)$	S	$v(S)$	S	$v(S)$
A	0	B	0	C	0
A,B	500	B,C	3000	C,A	1500
A,B,C	4500				

となります。ここではこの 3 人で便乗したときの余剰分 4500 円をどのように配分するかを考えます。余剰金額に関するそれぞれの配分を x_A, x_B, x_C として、最小 ε -コアを求める LP を定式化すると

$$\begin{array}{ll}
 \min_{\mathbf{x}, \varepsilon} & \varepsilon \\
 \text{s.t.} & \varepsilon + x_A \geq 0 \\
 & \varepsilon + x_B \geq 0 \\
 & \varepsilon + x_C \geq 0 \\
 & \varepsilon + x_A + x_B \geq 500 \\
 & \varepsilon + x_B + x_C \geq 3000 \\
 & \varepsilon + x_A + x_C \geq 1500 \\
 & x_A + x_B + x_C = 4500
 \end{array}$$

となります。これをソルバーで解くと最適値が -750 となるので、最適解の配分 $(x_A, x_B, x_C) = (750, 750, 3000)$ はコアに含まれます。この配分は余剰分 4500 円の配分なので、支払額は 1 人で乗った場合の金額からこの配分額を引くことで求められます。すなわち、 A は 2750 円、 B は 4250 円、 C は 7000 円を分担するというのが、ここでの配分案になります。

[トピック] Shapley 値と投票力指数

コアは全員の提携が安定に成り立つための条件を示すものですが、それが存在することは保証できませんし、また存在しても一意な配分をもたらすとは限りません。一意に配分を定める概念として **Shapley 値** (シャープレー値、Shapley value) が有名です。

Shapley 値は提携に対する限界貢献度を基に計算されます。たとえば「ルパン (L)」「次元 (J)」「石川 (I)」の 3 人の提携が「 $L \rightarrow J \rightarrow I$ 」の順番に提携が構成されたとします。つまり、3 人の提携 $\{L, I, J\}$ が

$$\emptyset \rightarrow \{L\} \rightarrow \{L, I\} \rightarrow \{L, I, J\}$$

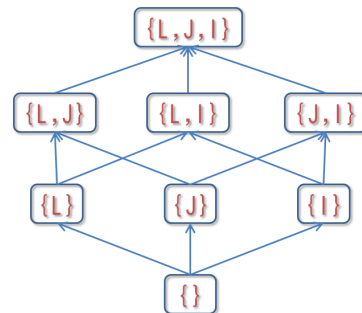
のように拡大したと考えます。このとき、利得は

$$0 \rightarrow 1.0 \rightarrow 1.8 \rightarrow 10$$

と増えたと考えられます。ここで加わった順番に、初めに加わった L は $1.0 - 0.0 = 1.0$ 貢献し、その次に加わった J は $1.8 - 1.0 = 0.8$ 貢献し、最後に加わった I は $10 - 1.8 = 8.2$ だけ貢献したと考えるのです。また、提携の順番が「 $I \rightarrow L \rightarrow J$ 」であれば、

提携の変遷 S	$\emptyset$	$\rightarrow$	$\{I\}$	$\rightarrow$	$\{L, I\}$	$\rightarrow$	$\{L, I, J\}$
提携の増分			+I		+L		+J
特性関数値 $v(S)$	0	$\rightarrow$	0.7	$\rightarrow$	5.0	$\rightarrow$	10
$v(S)$ の増分			+0.7		+4.3		+5.0

となります。加わる順番は $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ 通りあります。(一般に n 人であれば、 $n!$ 通りです。)



各人の限界貢献度をこのすべての順番について平均をとったものがシャープレー値です。

この例ですべての順番に対する限界貢献度と、その平均値であるシャープレー値は以下の通りです。ルパンの配分が一番高くなっています。このように配分概念は様々あり、どれを採用するかで大小関係が変わることもあります。シャープレー値はコアに含まれないこともある一方、別の基準を満たす唯一の配分概念であることが知られています。どれも一長一短があるので、それらの性質を見極めることが重要というわけです。

順番	L	J	I
$L \rightarrow J \rightarrow I$	1.0	0.8	8.2
$L \rightarrow I \rightarrow J$	1.0	5.0	4.0
$J \rightarrow L \rightarrow I$	1.0	0.8	8.2
$J \rightarrow I \rightarrow L$	8.0	0.8	1.2
$I \rightarrow L \rightarrow J$	4.3	5.0	0.7
$I \rightarrow J \rightarrow L$	8.0	1.3	0.7
Shapley 値	3.88	2.28	3.83

さて、この Shapley 値は配分概念として重要な意味を持っているほか、少し異なった視点から国会などの場で各政党がどのような“投票力”を持つのかを分析するのに有効な考え方を提供してくれます。たとえば、以下のように3つの政党が、ある議会で99ある議席のうち表のような議席数を占めているとしましょう。

政党	A	B	C
議席数	49	47	4

この議会ではあらゆる議案の採択に過半数(50)の得票が必要であるとします。また、各党は同一の投票行動をとるものとします。すると、単独過半数を得ている政党がないので、議案の採択には2つ以上の政党の賛成が必要な状況です。その意味で各党は議案を通す上で「提携」することが必要です。そこで、Shapley 値の計算と同様にすべての提携の可能性(6通り)を考えます。議案を通すには過半数になること(のみ)が重要ですので、順番に提携を増やしたとき過半数を超えたときの貢献度を1、それ以外を0として限界貢献度の平均値を計算してみると次の表のように、いずれの政党も $\frac{1}{3}$ ずつで等しくなります。これは、一見大きな議席数を占める2つの政党A, Bが力を持っているように思えますが、実際に議案を通すという面からみるとAもBもCも同じ強さを持っていることを示しています。現実の議会(たとえば、日本の国会)でも、議席数では圧倒的に少ない政党が連立政権に参加したとたんにもものすごく強気に振る舞うという現象がよくありますが、これは政党の力を測るのに議席数ではなく、投票力指数のような観点が重要であることを示唆しているでしょう。

なお、この値は **Shapley-Shubik 指数** (シャープレイ・シュービク指数) と呼ばれるもので、他にも投票力を表現する指数が提案されています。

順番	A	B	C
A → B → C	0	1	0
A → C → B	0	0	1
B → A → C	1	0	0
B → C → A	0	0	1
C → A → B	1	0	0
C → B → A	0	1	0
平均値 (Shapley-Shubik 指数)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

関連図書

- [1] M. ガードナー（一松訳）『マーチン・ガードナーの数学ゲーム I [新装版]』（日経サイエンス社）2010 年.
- [2] 鈴木光男『ゲーム理論入門』（共立出版）1981 年.
- [3] 武藤滋夫, 小野理恵『投票システムのゲーム分析』（日科技連）1998 年.
- [4] 森雅夫, 松井知己『オペレーションズ・リサーチ』（朝倉書店）2004 年.
- [5] 渡辺隆裕『ゲーム理論入門』（日本経済新聞社）2008 年.
- [6] 福田恵美子 “ゲーム理論を用いたねじれ国会分析：投票力指数で影響力を測る” 『オペレーションズ・リサーチ』 Vol.54, pp.756–760, 2009 年.