2020年度高大接続型自己推薦入学試験事前課題

解答作成に関する注意

- この問題は，中央大学理工学部経営システム工学科 2020 年度高大接続型自己推薦入学試験の出願書類に含まれる事前課題です。（以下「本課題」と書きます。）
- 本課題の解答を A4 サイズ用紙に自筆でまとめてください。枚数は問いません。
- 本課題の全ての問題を解くことを必須とはしませんが，できる限り多くの問題を解くことが望まれます。
- 教科書の説明などにより自明とみなされるものを除き，解答に至るまでの過程も記述してください。
- 本課題の解答にあたっての筆記用具は指定しませんが，消えやすいものは使用しないでください。
- 本課題の解答にあたっては，どの問題について解いているのかが分かるように記述してください。
- 提出にあたっては，大学指定の「所定用紙 No.2-(1)」に在籍・出身学校名，氏名，生年月日，性別を記入して表紙とし，表紙と解答本文を重ねて左上をホチキスで留めて下さい。
- 解答についてはページ番号を振ってください。
- 本課題の解答は第 1 次の書類選考に用いる以外に，第 2 次選考の面接においても解答内容について質問することがあります。

中央大学 理工学部 経営システム工学科

1　数と式

問題 1.1　次の式を因数分解せよ。

(1) $(x+2y)^4-(x-2y)^4$　(2) x^6-y^6　(3) x^4+4

(4) $(x^2-x+1)(x^2-x+2)-12$　(5) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-6)-3x^2$

(6) $x^3+8y^3+1-6xyz$

問題 1.2　$x+y+z=1,\ xy+yz+zx=2,\ xyz=-2$ のとき，以下を求めよ。

(1) $x^2+y^2+z^2$　(2) $x^3+y^3+z^3$　(3)$(x+y)(y+z)(z+x)$

問題 1.3　$\dfrac{3}{3-\sqrt{6}}$ の整数部分を a，小数部分を b とするとき，$a, b, a-\dfrac{3}{b}$ の値をそれぞれ求めよ。

問題 1.4　次の不等式を満たす整数が 3 個になるように，それぞれについて a のとりうる値の範囲を求めよ。

(1) $1 \leqq x \leqq a$　(2) $1 < x < a$

問題 1.5　次の方程式，不等式を解け。

(1) $|x-3|=1$　(2) $|x-3|>1$　(3) $x=\sqrt{x+12}$

(4) $2|x-1|+|x-4| \leqq 9$　(5) $(a^2-1)x^2=(a-1)x$ (a を定数として場合分けせよ)

問題 1.6　次の式を簡単にせよ。

(1) $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)}$

(2) $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$

(3) $\dfrac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^3}{(c-a)(c-b)}$

問題 1.7　$x=\sqrt{2}-1$ のとき，$x^4+3x^3+4x^2+4x+2$ の値を求めよ。

問題 1.8　以下それぞれを求めよ。(i は虚数単位を表す。)

(1) $(x+y)^{10}$ の x^3y^7 の係数　(2) $\left(x^2-\dfrac{3}{x}\right)^{10}$ の定数項　(3) $(x+y+z)^9$ の x^3y^5z の係数

(4) $(x^2-x+1)^{10}$ の x^5 の係数　(5) 13^{10} を 10 で割った余り　(6) 21^{10} を 400 で割った余り

(7) ${}_{10}C_0+{}_{10}C_1+\cdots+{}_{10}C_{10}$　(8) ${}_{10}C_0-{}_{10}C_1+{}_{10}C_2-\cdots+{}_{10}C_{10}$

(9) $({}_{10}C_0)^2+({}_{10}C_1)^2+\cdots+({}_{10}C_{10})^2$　(10) ${}_{10}C_1+2\times{}_{10}C_2+\cdots+10\times{}_{10}C_{10}$

(11) x^4+x^2+b が x^2+ax+1 で割り切れるときの a, b

(12) $\dfrac{a+b}{c}=\dfrac{b+c}{a}=\dfrac{c+a}{b}=k$ となる k

(13) $x>0$ のとき $x+\dfrac{10}{x}$ の最小値，また $1<x<100$ のとき $x+\dfrac{10}{x}$ の最大値

(14) $a>0, b>0$ のとき $(a+b)\times\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{16}{b}\right)$ の最小値

(15) $a>0$ のとき $\dfrac{(a+2)(a+3)}{a}$ の最小値　(16) 2 乗して $-12\,i$ となる複素数　(17) $(1+i)^{24}$

(18) $(1+\sqrt{3}\,i)^{14}$　(19) $x^4-ax^3-x^2-x-6$ が $(x-2)$ で割り切れるときの a

(20) $x^4-ax^3-bx^2-x-6$ が $(x-2)^2$ で割り切れるときの $a,\ b$

(21) $x^{24}+x^{13}+1$ を x^2+1 で割ったときの余り

(22) x^{50} を x^2+x+1 で割ったときの余り

(23) $x^4+x^2+1=0$ の解　(24) $2x^4-5x^3-x^2-5x+2=0$ の解

2　2 次関数

問題 2.1　次の条件を満たす放物線をグラフとする 2 次関数を求めよ。

(1) 点 $(-1,4)$ を頂点とし，点 $(1,-4)$ を通る。

(2) 軸が直線 $x=1$ で，2 点 $(-2,13),(2,-3)$ を通る。

(3) x 軸から切り取る線分の長さが 6，頂点が $(1,-3)$ である。

(4) 3 点 $(-1,5)$, $(2,2)$, $(3,9)$ を通る。

(5) 3 点 $(-3,0),(2,0),(1,8)$ を通る。

問題 2.2　2 次関数 $y=ax^2-6+2a$ の最小値が 3 となるような a の値を求めよ。

問題 2.3　$y=-x^2+4x+1\ (1 \leqq x \leqq a)$ において

(1) 最小値を求めよ。　(2) 最大値を求めよ。

問題 2.4　実数 x,y の間に $x^2+y^2=4$ という関係があるとき

(1) $2x+y^2$の最大値と最小値，またそのときの x,y の値を求めよ。

(2) $2x+3y$ の最大値と最小値，またそのときの x,y の値を求めよ。

問題 2.5　$z=x^2-4xy+6y^2+2x-8y+9$ の最小値とそのときの x,y の値を求めよ。

問題 2.6　$g(x)=-x^2$, $f(x)=x^2-2x+a$ とする。次の条件を満たすような定数 a の範囲をそれぞれ求めよ。

(1) すべての x に対して $g(x)<f(x)$

(2) ある x に対して $g(x)>f(x)$

(3) すべての組 x_1,x_2 に対して $g(x_1)<f(x_2)$

(4) ある組 x_1,x_2 に対して $g(x_1)>f(x_2)$

問題 2.7　次の関数のグラフを描け。

(1) $y=|x^2-3x+2|$　(2) $y=|x^2-3x+2|+|x-1|$

3　三角比，三角関数

$\triangle$ABC において，角 A, B, C の対辺の長さをそれぞれ a, b, c とする。

問題 3.1　$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ で $\cos\theta = \dfrac{4}{5}$ のとき，次のそれぞれについて求めよ。

(1) $\sin\theta$　(2) $\tan\theta$　(3) $\cos\dfrac{\theta}{2}$　(4) $\sin\dfrac{\theta}{2}$　(5) $\tan\dfrac{\theta}{2}$

(6) $\cos\dfrac{\theta}{3} = x$ とおいたとき，x の満たす 3 次方程式

問題 3.2　$\sin\theta\cos\theta = -\dfrac{1}{8}$ $\left(\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi\right)$ のとき，次のそれぞれについて求めよ。

(1) $\cos\theta - \sin\theta$　(2) $\tan\theta + \dfrac{1}{\tan\theta}$　(3) $\tan^3\theta + \dfrac{1}{\tan^3\theta}$　(4) $\sin\theta$　(5) $\cos\theta$

問題 3.3　$\theta = \dfrac{\pi}{5}$ のとき

(1) $\sin 3\theta = \sin 2\theta$ を示せ。

(2) $\cos\dfrac{\pi}{5}$ の値を求めよ。

問題 3.4　$\triangle$ABC において次の等式，不等式が成立することを示せ。

(1) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A\sin B\sin C$

(2) $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

(3) $\sin(A+B) < \sin A + \sin B$

(4) $\cos A + \cos B \leqq 2\sin\dfrac{C}{2}$

問題 3.5　実数 x, y が $x^2 + y^2 = 1, 0 \leqq y \leqq x$ を満たすとき

(1) $x + y$ の最大値，最小値を求めよ。

(2) $5x^2 + 2xy + 3y^2$ の最大値，最小値を求めよ。

問題 3.6　$\triangle$ABC において，次の値を求めよ。

(1) $a = 2,\ b = \sqrt{2} + 1$，角 $C = \dfrac{\pi}{4}$ のとき c

(2) $a = 3,\ b = 5$，$c = 7$ のとき $\sin A$, 角 C

(3) $a = 4,\ b = 2\sqrt{2}$, 角 $A = \dfrac{\pi}{4}$ のとき c, 角 B

問題 3.7　$\triangle$ABC が鋭角三角形のとき，以下の等式を証明せよ。

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a'}{\sin A} = \frac{b'}{\sin B} = \frac{c'}{\sin C} = 2R$$

ここで $a' = AH,\ b' = BH,\ c' = CH,\ H$ は $\triangle$ABC の重心，R は外接円の半径

4　確率

問題 4.1　以下を求めよ。

(1) 2 人でじゃんけんをするとき，あいこになる確率

(2) 3 人でじゃんけんをするとき，あいこになる確率

(3) 4 人でじゃんけんをするとき，2 人が勝ち，2 人が負ける確率

(4) 4 人でじゃんけんをするとき，あいこになる確率

問題 4.2　さいころを n 回振って出た目を $X_1, X_2, ..., X_n$ とする。以下の確率を求めよ。

(1) $P(X_1 \leqq 4)$(= 事象 $X_1 \leqq 4$ が起こる確率）　(2) $P(X_1 + X_2 \leqq 4)$　(3) $P(X_1X_2 = 6)$

(4) $P(X_1X_2X_3 = 12)$　(5) $P(X_1X_2X_3 = 12$ の倍数$)$　(6) $P(X_1X_2 \cdots X_n = 1)$

(7) $P(X_1X_2 \cdots X_n = 2)$　(8) $P(X_1X_2 \cdots X_n = 2$ の倍数$)$　(9) $P(X_1X_2 \cdots X_n = 6)$

(10) $P(X_1X_2 \cdots X_n = 6$ の倍数$)$　(11) $P((X_1 - 2)^2 + \cdots + (X_n - 2)^2 = 0)$

(12) $P((X_1 - 2)^2 + \cdots + (X_n - 2)^2 = 1)$　(13) $P((X_1 - 2) \times \cdots \times (X_n - 2) = 1)$

(14) $P((X_1 - 2) \times \cdots \times (X_n - 2) = 2)$　(15) $P((X_1 - 2) \times \cdots \times (X_n - 2) = 0)$

(16) $X_1, X_2, \ldots, X_n$のうち 4 以上の目が出た回数を Y とするとき $P(Y = k)$

(17) Z 回目にはじめて 4 以上の目が出るとき $P(Z = k)$

(18) 前問の Z について，$P(Z \leqq k)$

(19) $X_1, X_2, \ldots, X_n$の最大値を M_nとするとき $P(M_n \leqq k)$

(20) 前問の M_n について，$P(M_n = k)$

(21) $M_n = 3$ という条件の下で 3 の目が 2 回出る確率

問題 4.3　ツボの中に 40 個の白玉と 30 個の黒玉がある。ここから 20 個の玉を取り出し，その中の白玉の個数を X とする。

(1) $P(X = k)$ を求めよ　(2) $P(X = k)$ を最大にする k を求めよ

問題 4.4　3 人でじゃんけんを行い，1 人だけが勝つまでじゃんけんを行う。k 回目のじゃんけんで初めて 1 人の勝者が決まる確率を P_kとする。以下を求めよ。

(1) P_1　(2) P_2　(3) P_k

問題 4.5　1 から 5 までの数字が 1 つずつ書かれた 5 枚のカードがある。無作為にカードを 1 枚引き元に戻す試行を繰り返す。i 回目の試行のカードの数字を $X_i, S_n = X_1 + \cdots + X_n$また $T_n = X_1X_2 \cdots X_n$ とする。以下を求めよ。

(1) $P(S_n = n)$　(2) $P(S_n = n + 1)$　(3) $P(S_n = n + 2)$　(4) $P(T_n = 4)$

(5) $P(T_n =$ 偶数$)$　(6) $P(T_n = 3$ の倍数$)$

(7) $P(S_n = 3$ の倍数$)$

5　命題と論理，集合

問題 5.1　全体集合を $U=\{x|x$ は自然数で $x \leqq 1000\}$ とする。$A=\{x|x$ は 3 の倍数$, x \in U\}, B=\{x|x$ は 4 の倍数$, x \in U\}, C=\{x|x$ は 5 の倍数$, x \in U\}$ とする。また，一般に集合 W に対して $|W|$ を W の要素の個数とする。以下を求めよ。ただし，$\emptyset$ は空集合，集合 A^c は集合 A その補集合を表す。

(1) $|A|$　　(2) $|A^c|$　　(3) $|A \cap B|$　　(4) $|A \cup B|$　　(5) $|A \cap B^c|$　　(6) $|A \cap B \cap C|$

(7) $|A \cup B \cup C|$

また，以下から正しいものを選べ。

(ア) $\emptyset \subset A$　　(イ) $\emptyset \in A$　　(ウ) $\{\emptyset\} \subset A$　　(エ) $A \cap B \subset A \cup B$　　(オ) $C \subset A \cup B$

(カ) $(A \cap C) \cup B = (A \cup B) \cap (A \cup C)$　　(キ) $(A \cup B)^c = A^c \cup B^c$　　(ク) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

(ケ) $|B \cup C| = |B| + |C|$

問題 5.2　次の各命題について真か偽かを説明をつけて答えよ。

(1) ある実数 x に対して $2^x > 3^x$

(2) すべての実数 x に対して $3^x > 0$

(3) すべての実数 x に対して $3^x > 2^x$

(4) すべての三角形において，ある内角は $60°$ 以上

(5) すべての三角形において，すべての内角は $90°$ 以下

(6) ある三角形において，すべての内角は $60°$ 以上

(7) ある三角形において，すべての内角は $60°$ より大きい

(8) ある実数 a に対して，すべての実数 x で $x^2+ax+1>0$

(9) ある実数 a に対して，すべての実数 x で $x^2+ax-1>0$

(10) すべての実数 x に対して，ある実数 a が存在して $x^2+ax-1>0$

(11) すべての実数 x，実数 a に対して $x^2+a^2>0$

(12) すべての実数 x，実数 a に対して $x^2+a^2>1$

(13) すべての実数 x に対して，ある実数 a が存在して $x^2-a^2>1$

(14) ある実数 a が存在してすべての実数 x に対し $x^2-a^2>1$

(15) ある実数 a が存在してすべての実数 x に対し $x^2-a^2>-1$

問題 5.3　以下の (1) ～ (10) に対して，次に示す① ～ ④の中から当てはまるものを選べ。

① P は Q であるための必要十分条件

② P は Q であるための必要条件であるが十分条件でない

③ P は Q であるための十分条件であるが必要条件でない

④ P は Q であるための必要条件でも十分条件でもない

(1) $\mathrm{P}: x^2+y^2 \geqq 25$　$\mathrm{Q}: 3x+4y \geqq 1$

(2) $\mathrm{P}: x^2+y^2 \leqq 25$　$\mathrm{Q}: 3x+4y \leqq 1$

(3) $\mathrm{P}: x^2+y^2 \leqq 25$　$\mathrm{Q}: x+y \leqq 1$

(4) $\mathrm{P}: a\sin\theta + b\cos\theta = 1\ (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ に解が存在する　$\mathrm{Q}: a^2+b^2 \leqq 1$

(5) P : $a+b>c$　Q : a,b,c がある三角形の 3 辺の長さ

(6) P : $a+b>c$ かつ $a>0$ かつ $b>0$ かつ $c>0$　Q : a,b,c がある三角形の 3 辺の長さ

(7) P : $b<0$　Q : x について 2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ に実数解が存在

(8) P : 四角形の対角線の長さが等しい　Q : 長方形

6　整数

問題 6.1　4500 の約数の個数と約数の総和を求めよ。

問題 6.2　12 の倍数で約数の個数が 15 である自然数 n を求めよ。

問題 6.3　50! は一の位からいくつ 0 が連続するか？

問題 6.4　n を自然数とするとき，$n^3 - n$ は 6 の倍数であることを証明せよ。

問題 6.5　n を自然数とするとき，$14^n + 4^{n+1}$ は 5 の倍数であることを証明せよ。

問題 6.6　3104 と 1649 の最大公約数を求めよ。

問題 6.7　(1) $7n$ と $3n+1$ が互いに素ならば $n-2$ と 7 は互いに素であることを示せ。
(2) $7n$ と $3n+1$ が互いに素になる自然数は何個あるか？

問題 6.8　$7x - 19y = 1$ の整数解 (一般解) を求めよ。

問題 6.9　次の方程式を満たす整数の組 (x, y) を全て求めよ。
(1) $xy - x + 3y = 0$　(2) $2xy - y + x - 3 = 0$　(3) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y} = 1$

問題 6.10　次の数を小数で表したときの，小数第 n 位の数字 a_n を求めよ。
$\left(\text{例}\quad \dfrac{1}{6} = 0.166\cdots \text{より，} a_1 = 1, a_5 = 6\right)$
(1)$\dfrac{19}{37}$ の a_{30}　(2)$\dfrac{23}{132}$ の a_1, a_2, a_{50}

7　図形と方程式

以下を求めよ。

問題 7.1　$A(1,2)$, $B(5,3)$ について AB を 2:5 に内分する点，2:5 に外分する点のそれぞれの座標。

問題 7.2　点 $(2,-1)$ を通り，直線 $3x-4y+1=0$ に平行な直線と垂直な直線の方程式。

問題 7.3　$A(1,1)$, $B(3,5)$ とし，点 P は x 軸上を動くとする。
(1) PA+PB の最小値とそのときの P の座標。
(2) $|\mathrm{PA}-\mathrm{PB}|$ の最小値とそのときの P の座標。
(3) $|\mathrm{PA}-\mathrm{PB}|$ の最大値とそのときの P の座標。
(4) $\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2$ の最小値とそのときの P の座標。
(5) $\mathrm{PA}^2+2\mathrm{PB}^2$ の最小値とそのときの P の座標。

問題 7.4　$2x-3y+1=0$ と $x+2y-4=0$ の交点を通る直線のうち次の条件を満たす直線の方程式。
(1) 点 $(1,3)$ を通る。　(2) 直線 $x+3y=0$ と平行。　(3) 直線 $x+3y=0$ と垂直。

問題 7.5　2 点 O $(0,0)$, A $(4,4)$ がある点 P が放物線 $y=x^2+1$ 上を動くとき，
(1) $\triangle$OAP の面積が 2 となる点 P。　(2) $\triangle$OAP の面積が最小になるときの点 P とその最小値。

問題 7.6　2 点 A $(3,-4)$, B $(-1,6)$ を直径の両端とする円の方程式。

問題 7.7　3 点 $(3,1)$, $(0,4)$, $(6,4)$ を通る円の方程 x 式。

問題 7.8　直線 $y=3x+3$ が円 $x^2+y^2=10$ によって切り取られる弦の長さ。

問題 7.9　円 $x^2+y^2=169$ 上の点 $(5,-12)$ における接線の方程式。

問題 7.10　円 $(x-2)^2+(y-4)^2=10$ 上の点 $(3,7)$ における接線の方程式。

問題 7.11　円 $x^2+y^2-2x-6y=0$ に接する傾きが 2 の接線の方程式。

問題 7.12　2 つの円 $x^2+y^2=25$, $(x-2)^2+(y-1)^2=20$ について，2 つの交点を通る直線の方程式と 2 つの交点を通り，点 $(2,7)$ を通る円の方程式。

問題 7.13　点 $A(3,4)$ を通り円 $x^2+y^2=1$ に接する 2 直線の接点をそれぞれ P, Q とするとき，直線 PQ の方程式と線分 PQ の長さ。

問題 7.14　$y=x^2$ を考える。点 A $(-1,0)$ を通り，傾き m の直線は，$y=x^2$ と 2 交点 B, C を持ち，
|B の x 座標 $-$ C の x 座標 |=3 である。m を求めよ。また，その直線と $y=x^2$ で囲まれた部分

の面積を求めよ。

8　指数と対数

問題 8.1　次の計算をせよ。ただし，a, b は正の定数とする。

(1) $\left(a^{\frac{3}{5}} \times a^{\frac{1}{3}}\right)^5 \div a^{\frac{1}{3}}$

(2) $\left(\left(\dfrac{81}{25}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{4}}$

(3) $\sqrt[4]{ab^3} \times \sqrt[8]{a^4b^2} \div \sqrt{a^3b}$

(4) $(a^{\frac{1}{8}} - b^{\frac{1}{8}})(a^{\frac{1}{8}} + b^{\frac{1}{8}})(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})$

(5) $(a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}})(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})(a^{\frac{8}{3}} + a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{8}{3}})$

(6) $\log_3 150 - \log_3 50$

(7) $(\log_8 27)(\log_9 4 + \log_3 16)$

(8) $(\log_2 9 + \log_8 3)(\log_3 16 + \log_9 4)$

(9) $2^{\log_2 3}$

問題 8.2　次の方程式，不等式を解け。

(1) $4^{2x+3} = 2^{3x+2}$　(2) $3^x + 3^{3-x} - 12 = 0$　(3) $2^x + 2^{5-x} - 4 > 0$　(4) $2^{x-4} < 8^{1-2x} < 4^{x+1}$

(5) $\log_{\frac{1}{3}} x > 4$　(6) $\log_2(x+1) \geqq \log_2(x-1) - \log_{\frac{1}{2}}(x+2)$

問題 8.3　(1) $2^9 = 512, 2^{10} = 1024$ を用いて，$\log_{10} 2$ の値を小数第一位まで求めよ。

(2) $\log_{10} 2$ は有理数でないことを示せ。

(3) 2^{50} の桁数を求めよ。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

9　数列

問題 9.1　以下を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k^2+k)$　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k-1)$　(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}3^k$　(4) $\displaystyle\sum_{k=100}^{200}(3k-1)$　(5) $\displaystyle\sum_{k=100}^{200}3^k$　(6) $\displaystyle\sum_{k=100}^{200}3^{2k+1}$

(7) $\displaystyle\sum_{k=100}^{\infty}3^{-2k}$　(8) $\displaystyle\sum_{k=0}^{100}{}_{100}C_k$　(9) $\displaystyle\sum_{k=1}^{99}{}_{100}C_k\,2^k$　(10) ${}_{10}C_3+{}_{11}C_3+{}_{12}C_3+\cdots+{}_{20}C_3$

問題 9.2　次を満たす数列の一般項 a_n を求めよ。

(1) 初項 3 で公差が 4 の等差数列。

(2) 初項 3 で公比が 4 の等比数列。

(3) $a_{k+1}-a_k=3, (k=0,1,2,\ldots,n)$ で $a_0=2$

(4) $a_{k+1}-a_k=k^2, (k=1,2,\ldots,n)$ で $a_1=3$

(5) $a_{k+1}=3a_k+1, (k=1,2,\ldots,n)$ で $a_1=3$

(6) $a_{k+1}=3a_k+k, (k=0,1,2,\ldots,n)$ で $a_0=3$

(7) $a_{k+1}-5a_{k+1}+6a_k=0, (k=0,1,2,\ldots,n)$ で $a_0=1, a_1=7$

(8) $ka_{k+1}=(k+1)a_k+1, (k=1,2,\ldots,n)$ で $a_1=1$

(9) $(k+3)a_{k+1}=ka_k, (k=1,2,\ldots,n)$ で $a_1=1$

問題 9.3　以下を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{\ell=1}^{k}\ell\right)$　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(n-k)$　(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$　(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$　(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k3^{k-1}$

問題 9.4　(1) n を 2 以上の自然数とするとき，$\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}<2-\dfrac{1}{n}$ を示せ。

(2) n を 5 以上の自然数とするとき，$2^n>n^2+4$ を示せ。

10　ベクトル

問題 10.1　正 6 角形 ABCDEF において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{a}, \overrightarrow{\mathrm{AF}}=\overrightarrow{b}$ とする。線分 AD と線分 BE の交点を O，線分 OC の中点を G，線分 OE の中点を H とし，$|\overrightarrow{a}|=1$ とするとき以下のベクトルを $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ で表せ。また，値を求める問題はその値を求めよ。
(1) $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$　(2) $\overrightarrow{\mathrm{BG}}$　(3) $\overrightarrow{\mathrm{CH}}$　(4) $\overrightarrow{\mathrm{GH}}$　(5) $\overrightarrow{\mathrm{BH}}$　(6) $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$　(7) $\left|\overrightarrow{\mathrm{DG}}\right|$　(8) $\left|\overrightarrow{\mathrm{BH}}\right|$　(9) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$
(10) $\left|\overrightarrow{a}-3\overrightarrow{b}\right|$　(11) $\left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right|$　(12) $\triangle$ABH の面積　(13) $\triangle$AGH の面積

問題 10.2　$\left|\overrightarrow{a}\right|=1, \left|\overrightarrow{b}\right|=3, \left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|=\sqrt{7}$ のとき，以下を求めよ。
(1) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$　(2) $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角　(3) $\left|3\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|$　(4) $\overrightarrow{b}-k\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{a}$ となる実数 k

問題 10.3　$\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|=1, \left|2\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}\right|=1$ を満たすとき，以下を求めよ。
(1) $(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot(2\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b})$ の最大値と最小値　　(2) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ の最大値と最小値
(3) $\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|$ の最大値と最小値

問題 10.4　$\triangle$ABC において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{a}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{b}$ とする。$\mathrm{AB}=2, \mathrm{AC}=3, \mathrm{BC}=4$ であるとし，外心を O，内心を I，垂心を H，重心を G とする。また，辺 AB を 1 : 3 に内分する点を P，辺 AC を 3 : 2 に内分する点を Q，BQ と CP の交点を R とする。このとき，次を求めよ。
(1) $\triangle$ABC の面積　(2) $\cos\angle\mathrm{BAC}$　(3) $\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ を $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ を用いて表せ　(4) $\triangle$ABR
(5) 線分 AR の延長と辺 BC の交点を D とするとき，BD : DC
(6) $\triangle$ABC の外接円の半径 R　(7) $\triangle$ABC の内接円の半径 r　(8) $\sin\angle\mathrm{BOC}$　(9) $\sin\angle\mathrm{BIC}$
(10) $\sin\angle\mathrm{BHC}$　(11) AG　(12) AH　(13) AI

問題 10.5　正四面体 OABC を考え，$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とし，$|\overrightarrow{a}|=1$ とする。線分 OA 上に $\mathrm{OD}=\dfrac{1}{3}$ となる点 D，線分 OC 上に $\mathrm{OE}=\dfrac{3}{4}$ となる点 E をとる。O から平面 ABE に垂線を下ろし，平面 ABC との交点を H とする。また，平面 CDE と直線 OH の交点を F とする。このとき，以下を求めよ。
(1) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$　(2) DE　(3) $\left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right|$　(4) $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ を用いて表せ　(5) $\left|\overrightarrow{\mathrm{OF}}\right|$

11　極限

問題 11.1　以下の数列の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n+1}{n^2-n}$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left(e^{\frac{2}{n}}-1\right)$　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{2}{n}$　(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{2}{n^2}$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n$　(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)^n$　(7) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n^2}\right)^n$　(8) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\log\left(1+\frac{2}{n}\right)$

(9) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\left(n^2\right)$　(10) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log\left(2+\frac{3}{n}\right)$　(11) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(3^n+2^n\right)^{\frac{1}{n}}$

問題 11.2　以下の関数の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2}{x+2}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2}{x-2}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{x-2}$　(4) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\sin x-\sin 2}{x-2}$　(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1-ax}{x^2}$ (極限が有限値として存在する a も求めよ)　(7) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$

(8) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x^2}{x^2}$　(9) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x^2}{x}$　(10) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin 3x}{x}$　(11) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(3^x+2^x\right)^{\frac{1}{x}}$

(12) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\log(1+3x)$　(13) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log(1+3x)$　(14) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\log(1+3x)$

12　微分

関数 12.1　次の関数の導関数を計算せよ。

(1) x^3　(2) x^π　(3) e^{2x}　(4) $e^{\pi x}$　(5) π^x　(6) $\log x$　(7) $\log(2x)$　(8) $\log(x+2)$
(9) $\log\left(x^2+1\right)$　(10) $(x-1)^5(x+1)^{10}$　(11) $\sin x$　(12) $\sin x\cos x$　(13) $\tan x$
(14) $\dfrac{1}{\cos^2 x}$　(15) $\sin\log x$　(16) $\cos e^x$　(17) $\tan(e^{-x^2})$　(18) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$　(19) $\sqrt{x^2+1}$
(20) $e^x\log x$　(21) $e^x\sin x$　(22) $e^x\cos x$　(23) $e^x\tan x$　(24) $\dfrac{2x^2-7x+3}{2x-1}$
(25) $\sqrt[3]{4-x^2}$　(26) $\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}$　(27) $\sin^3(2x+1)$　(28) $\log_x 2$　(29) $\dfrac{1-\sin x}{\cos x}$
(30) $\log\left|\dfrac{1-2x}{1+2x}\right|$

関数 12.2　次の関数の 2 次導関数を計算せよ。ただし a,b は定数とする。

(1) $\log x$　(2) e^{2x}　(3) $\sin x$　(4) $\cos x$　(5) $\tan x$　(6) $\dfrac{1}{\cos^2 x}$　(7) $e^{ax}\cos bx$

関数 12.3　次の関数 $f(x), g(x)$ について，$f(0)=g(0), f'(0)=g'(0), f''(0)=g''(0)$ を満たす a,b,c を求めよ。

$$f(x)=2\sin x+5 \quad g(x)=\frac{a}{bx^2+cx+1}$$

関数 12.4　次の関数の増減表 (凹凸も調べよ) を書き，グラフの概形を描け。(ただし，(3) の凹凸は調べなくても良い。)

(1) $y=e^{-\frac{x^2}{2}}$　(2) $y=\dfrac{1}{1+x^2}$　(3) $y=\dfrac{x}{1+x^2}$

13　積分

問題 13.1　以下を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int e^{2x}dx$　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx$　(3) $\displaystyle\int \log x\,dx$　(4) $\displaystyle\int \sin 2x\,dx$　(5) $\displaystyle\int x\sin x^2 dx$

(6) $\displaystyle\int x\sin x\,dx$　(7) $\displaystyle\int \cos x\,dx$　(8) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x}$　(9) $\displaystyle\int \tan x\,dx$

問題 13.2　以下を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 e^{5x}dx$　(2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}dx$　(3) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{1+x^2}dx$　(4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$　(5) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$

(6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx$　(7) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x\,dx$　(8) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos 2x\,dx$　(9) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$

(10) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx$　(11) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\sin x\,dx$　(12) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin 2x}$　(13) $\displaystyle\int_1^2 \log x\,dx$

(14) $\displaystyle\int_1^2 x^2\log x\,dx$　(15) $\displaystyle\int_1^2 x^2\log(2x)\,dx$　(16) $\displaystyle\lim_{A\to\infty}\int_1^A e^{-2x}dx$　(17) $\displaystyle\lim_{A\to\infty}\int_0^A xe^{-2x}dx$

(18) $\displaystyle\lim_{A\to\infty}\int_1^A \frac{dx}{x^3}$　(19) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos x\,dx$　(20) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\,dx$　(21) $\displaystyle\int_0^1 (3x+1)^{10}dx$

(22) $\displaystyle\int_0^1 x(3x+1)^{10}dx$　(23) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx$　(24) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx$　(25) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\,dx$

(26) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-x}\cos x\,dx$　(27) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x^2}dx$